

Université de Genève
Faculté des sciences économiques et sociales

Département d'économétrie

Contribution aux explications
dynamiques de la
consommation semi-agrégée

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de docteur
ès sciences économiques et sociales
mention économétrie et statistique

par

EDOUARD ROSSIER

Thèse No. 230

Collection des thèses de la Faculté des sciences
économiques et sociales

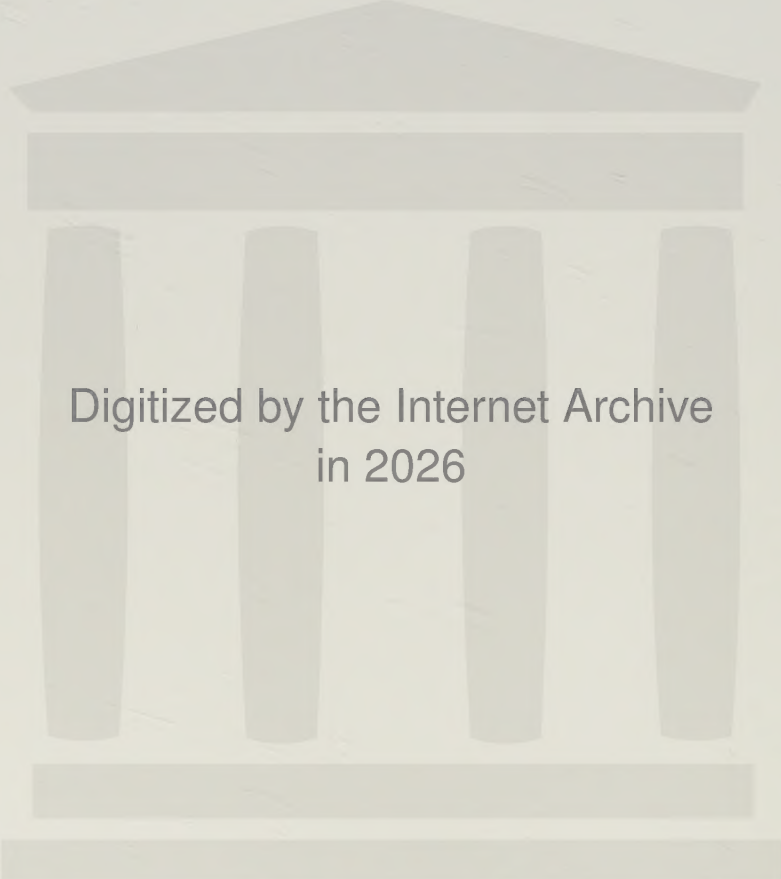


Herbert Lang Berne
Peter Lang Francfort/M.

1974

Edouard Rossier

Contribution aux explications
dynamiques de la
consommation semi-agrégée



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545901_0030

Université de Genève
Faculté des sciences économiques et sociales

Département d'économétrie

Contribution aux explications
dynamiques de la
consommation semi-agrégée

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de docteur
ès sciences économiques et sociales
mention économétrie et statistique

par

EDOUARD ROSSIER

Membres du jury de thèse, les professeurs :

Emilio Fontela, Genève

Louis Philips, Louvain

Jacques Royer, Genève, président du jury

Luigi Solari, Genève, directeur de thèse

Thèse No. 230

Collection des thèses de la Faculté des sciences
économiques et sociales



Herbert Lang Berne
Peter Lang Francfort/M.
1974

La Faculté des sciences économiques et sociales, sur le préavis d'une commission composée des professeurs Emilio Fontela, Louis Philips et Luigi Solari, autorise l'impression de la présente thèse, sans entendre émettre par là aucune opinion sur les propositions qui s'y trouvent énoncées.

Genève, le 21 mars 1973

Le doyen
Luigi Solari

Thèse No. 230



©

Herbert Lang & Cie SA, Berne (Suisse)
Peter Lang S. A. R. L., Francfort/M. (RFA)
1974. Tous droits réservés.

Réimpression ou reproduction interdite par n'importe quel procédé,
notamment par microfilm, xérogaphie, microfiche, microcarte, offset, etc.

Impression: Lang Druck SA, Liebfeld/Berne (Suisse)

AVANT-PROPOS

L'effort de conceptualisation d'une réalité économique donnée au niveau d'un modèle économétrique peut être apprécié par la nature des explications recherchées. Comme toute science, l'économétrie procède à cet égard du moins général au plus général, et les explications statiques s'imposent en premier lieu.

Ces explications se fondent sur la stabilité de la structure du phénomène économique envisagé. Elles conduisent à expliciter des relations d'équilibre entre les variables qui caractérisent le phénomène, et fournissent ainsi un type de représentation intemporelle.

Quant à leur portée, il est bien évident que les modèles statiques sont limités par l'hypothèse de stabilité de la structure qu'ils postulent.

C'est aux explications cinématiques qu'il reviendra de décrire l'évolution d'une structure dans le temps, sans toutefois se soucier de mettre en évidence les causes de cette évolution. Aussi, cet aspect descriptif inhérent aux modèles cinématiques trouve sa pleine justification en vue de l'élaboration d'un type d'explications plus générales, les explications dynamiques.

Le rôle des explications dynamiques sera justement de mettre en évidence les enchaînements temporels entre les variables qui caractérisent un phénomène économique, explicitant ainsi les principales forces déterminantes quant à l'évolution d'une structure dans le temps.

On a souligné le caractère conceptuellement plus général des modèles dynamiques, qui contiennent comme cas particulier les modèles statiques. Cependant, les modèles statiques ont souvent permis, par leur simplicité même, des représentations très détaillées des phénomènes économiques.

Notre réflexion sur les explications dynamiques de la consommation semi-agrégée s'intègre dans ce contexte.

Les modèles dynamiques de consommation se trouvaient encore récemment, en raison de la complexité qui découle de leur plus grande généralité, confinés à l'étude spécifique d'un phénomène isolé. Au contraire, les modèles statiques de la consommation ont pu être utilisés de manière systématique, dans des formulations semi-agrégées et dans le cadre de modèles globaux ou d'exploration à terme.

Ainsi, notre recherche vise à une maîtrise accrue des modèles dynamiques de la consommation semi-agrégée en vue, notamment, de leur utilisation dans des représentations d'ensemble des phénomènes économiques. Nous avons, pour cela, porté notre attention dans plusieurs directions.

Au niveau de la formulation des hypothèses, il nous est apparu important d'essayer de dégager, d'une manière générale, les principaux concepts conduisant à une recherche fructueuse quant aux différents types de modèles dynamiques de consommation.

Au niveau des applications menant à la spécification d'un modèle particulier, nous nous sommes efforcé d'illustrer notre démarche par des exemples qui, tout en restant partiels, n'en donnent pas moins une idée assez large des diverses représentations pouvant être envisagées.

Sur le plan de l'estimation de ces modèles, nous avons tenté d'élaborer une méthodologie statistique qui, conjointement aux procédures numériques d'estimation, soit d'une efficacité comparable à l'efficacité des méthodes d'estimation actuellement utilisées pour les modèles statiques de consommation⁽¹⁾.

Enfin, les résultats d'estimation, sur la base de données du Royaume-Uni, sont commentés avec le souci de dégager les représentations dynamiques les plus opératoires de la consommation semi-agrégée.

(1) Une telle efficacité est indispensable, notamment en vue d'une analyse par simulation des propriétés des estimateurs retenus.

III.

Nous n'aurions pu entreprendre ni poursuivre une telle recherche si nous n'avions bénéficié constamment des conseils bienveillants de notre maître, le professeur L. SOLARI, doyen de la Faculté des sciences économiques et sociales de l'Université de Genève, directeur du Département d'économétrie et du Centre d'économétrie de l'Université de Genève. Non seulement le professeur Solari nous a initié à l'économétrie, mais les enseignements qu'il nous a dispensé sans cesse, sa compréhension des phénomènes économiques qu'il nous a généreusement communiquée, dépassent largement le cadre de cette thèse. Aussi souhaiterions-nous par ce travail, réussir à lui rendre hommage.

Nos remerciements vont également au professeur E. FONTELA, directeur du département d'économie appliquée de l'Institut Battelle de Genève, au professeur J. ROYER, chef du Centre de projections et de programmation de la Commission économique pour l'Europe, et au professeur L. PHILIPS, de l'Université catholique de Louvain, pour l'intérêt et le temps précieux qu'ils ont bien voulu accepter de consacrer à nos travaux.

Nous ne saurions oublier dans ce témoignage de reconnaissance le Centre d'économétrie de l'Université de Genève qui a été le cadre stimulant où nous avons trouvé non seulement le support technique indispensable à la réalisation de tout travail scientifique, mais encore un climat d'amitié et d'échange d'idées enrichissant. Que tous ses membres trouvent ici l'expression de notre gratitude.

"En ce sens, on peut donc dire que toute statique est sous-tendue par une dynamique convergente" (1) .

"Nous savons bien cependant qu'ici, comme en physique, le cadre théorique proposé ne vise pas à donner une représentation exacte de la réalité mais simplement une représentation utile du point de vue des conséquences pratiques que l'on peut tirer au niveau des faits observés" (2) .

(1) Luigi Solari, "L'économétrie, recherche d'une synthèse entre expérience et théorie", *Publications de la Faculté des sciences économiques et sociales de l'Université de Genève*, Vol. XVII, Genève, Librairie de l'Université, 1965, p. 32.

(2) Philippe Nasse, "Analyse des effets de substitution dans un système complet de fonctions de demande", *Annales de l'INSEE*, No 5, septembre-décembre 1970, p. 84.

Chapitre I CONCEPTUALISATION DE BASE ET ETAT DES CONNAISSANCES ACQUISES

Le but de ce chapitre est d'introduire les concepts sur lesquels se fonde notre recherche, tout en faisant brièvement état des connaissances acquises dans le domaine des modèles dynamiques de consommation.

1. Systèmes de fonctions de consommation semi-agrégées

Les modèles que constituent les *systèmes de fonctions de consommation semi-agrégées* visent à expliquer le volume de la consommation de groupes de biens en fonction de *variables prédéterminées* ⁽¹⁾, notamment les variables exogènes prix et dépense totale. Les différents groupes de biens correspondent en général, dans les comptes nationaux, aux données semi-agrégées de la consommation privée.

On retient le plus souvent, comme cadre conceptuel de ces modèles, les axiomes de la *théorie des choix* ⁽²⁾. On se propose ainsi de représenter un comportement *moyen* de consommation, à l'échelle d'un pays ou d'une nation, par une cellule générique munie d'un système cohérent de préférences que lui confèrent ces axiomes.

S'agissant de *modèles statiques*, on suppose d'une part l'indépendance des préférences de la cellule dans le temps, et d'autre part, que toutes les variables puissent être référées à une même époque. On explicite alors des *relations d'équilibre* entre les variables.

Rappelons les propriétés que doit vérifier un système de fonctions de consommation semi-agrégées pour être compatible avec les hypothèses de la théorie des choix.

(1) Il s'agit de toutes les variables exogènes, retardées ou non, et des variables endogènes retardées. Cf. [29], p. 57. (Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, pp. 235-239.

(2) On trouvera dans [47] un traitement complet et détaillé de la théorie des choix. Voir également [30], pp. 61-88.

Dans leur formulation statique, les systèmes de fonctions de consommation semi-agrégées envisagées s'écrivent :

$$(1) \quad q = q(p, r) \quad (1) \quad .$$

Le système (1) traduit le comportement d'une *cellule de consommation* générique qui, dans l'unité de temps retenue (2), détermine ses *quantités de consommation* $q = \| q_i \|_{i=1,2,\dots,n}$, en fonction des *prix* correspondants $p = \| p_i \|_{i=1,2,\dots,n}$ et de la *dépense totale* $r = p'q$ supposés exogènes. Par référence aux comptes nationaux, l'indice i , $i=1,2,\dots,n$, caractérise les différentes rubriques retenues dans la ventilation de la consommation privée. Ainsi, q_i représente l'agrégat en volume pour la i -ème rubrique et p_i le prix implicite nominal qui lui est associé. Par la suite, on désignera, de façon équivalente, les rubriques de consommation par *bien*.

- (1) Les vecteurs sont désignés par des lettres minuscules. Les vecteurs sont toujours écrits en colonne; les vecteurs-ligne s'en déduisent par transposition.

Le signe ' est le symbole de transposition d'un vecteur ou d'une matrice. ι et o désignent respectivement le vecteur unité et le vecteur nul.

On désigne les matrices par des lettres majuscules. Pour une matrice à m lignes et n colonnes, on adopte la notation abrégée :

$$A = \| a_{ij} \|_{i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n}$$

d'après laquelle a_{ij} désigne l'élément dans la i -ème ligne et la j -ème colonne.

On désigne par $\hat{a}$ une matrice diagonale dont les éléments non nuls sont, dans l'ordre, ceux du vecteur a .

- (2) L'unité de temps correspond en général à une période annuelle.

On retient en général des systèmes de fonctions de consommation qui satisfont à la propriété d'*additivité* :

$$(2) \quad p'q(p,r) = r \quad .$$

Pour ces systèmes, on admet également la propriété de symétrie des effets prix purs de substitution et de complémentarité qu'expriment les *relations de Slutsky* :

$$(3) \quad S = S' \quad ,$$

avec
$$S = \frac{\partial q}{\partial p'} + \frac{\partial q}{\partial r} q' \quad .$$

Les relations (2) et (3) ci-dessus impliquent la propriété d'*homogénéité de degré zéro* des fonctions de consommation :

$$(4) \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \quad (1) \quad , \quad q(kp,kr) = q(p,r) \quad ,$$

ce que l'on vérifie aisément à l'aide de l'*identité d'Euler* :

$$(5) \quad Sp = \frac{\partial q}{\partial p} p + \frac{\partial q}{\partial r} r = 0 \quad .$$

On admettra que la matrice singulière S est de rang $n-1$. Par ailleurs, la symétrie de la matrice S résume les conditions nécessaires et suffisantes d'*intégrabilité* des fonctions de consommation (1). Cela équivaut à l'existence d'une famille d'hypersurfaces de la forme $u(q) = \text{constante}$, tangentes à l'hyperplan $p'q = r$. Si pour les *complexes* $q \in Q$, où Q désigne le *champ de choix*, on a :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial q} > 0 \quad ,$$

et que l'on impose en plus à la matrice S d'être semi-définie négative :

(1) $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$$(7) \quad \forall y \neq kp \quad , \quad y' S y < 0 \quad ,$$

alors les fonctions de consommation (1) peuvent être envisagées de manière équivalente comme un système de *lois de demande individuelles* dans le cadre de la théorie des choix ⁽¹⁾.

Dans ce cadre, le système de préférences de la cellule de consommation peut être représenté par un *indicateur d'utilité* $u = u(q)$ défini à une *transformation parétienne* près, monotone croissante ⁽²⁾. D'après (6), on admet des *utilités marginales* positives, ce qui résulte de l'hypothèse de *non-saturation*; la relation (7) équivaut dès lors à la quasi-concavité stricte de l'indicateur $u(q)$. Ainsi $q(p,r)$ est solution unique du système d'équations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial q} = \lambda p \\ p'q = r \end{cases} \quad ,$$

λ étant un multiplicateur de Lagrange.

Les relations (8) découlent du comportement de la cellule de consommation qui, pour des prix p et une dépense totale r donnés, détermine le vecteur des quantités de consommation q en maximisant l'indicateur $u(q)$ sous la contrainte d'additivité (2).

En raison de la propriété d'homogénéité de degré zéro, on peut encore exprimer le vecteur des quantités de consommation q en fonction des *prix relatifs* $\pi = r^{-1}p$:

$$q = q(\pi) \quad .$$

(1) Pour une démonstration élégante de ce résultat, Cf. [47], pp. 24-25.

(2) Tout indicateur de la classe parétienne envisagée peut alors s'écrire :

$$v = F[u(q)] \quad , \quad \text{avec} \quad \frac{dF}{du} > 0 \quad .$$

Dans l'*approche duale* en théorie des choix ⁽¹⁾, on introduit l'*indicateur d'utilité indirecte* ou *indicateur dual* :

$$\psi = \psi(\pi) = u [q(\pi)] \quad ,$$

également défini à une transformation parétienne près, qui mesure le niveau de satisfaction maximum compatible avec les prix relatifs π . Dès lors, on établit les correspondances en dualité :

$$\frac{\partial u}{\partial q} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \pi} < 0 \quad ,$$

$$\left. \begin{array}{l} d^2 u < 0 \\ du = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2 \psi > 0 \\ d\psi = 0 \end{array} \right. \quad ,$$

et l'on peut envisager le *problème dual* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\pi} \psi(\pi) \\ \pi'q = 1 \end{array} \right. \quad .$$

En vertu du *théorème de Roy* ⁽²⁾, les fonctions de consommation associées à $\psi(\pi)$ sont telles que :

$$(9) \quad q = \left[\pi' \frac{\partial \psi}{\partial \pi} \right]^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \pi} \quad ,$$

relation qui permet d'expliciter q en fonction de π dès que l'on se donne un indicateur dual.

Il convient de souligner que les conditions (6) et (7) ci-dessus impliquent en général des restrictions a priori quant au domaine des valeurs admissibles pour les paramètres caractérisant un système de fonctions de consommation particulier. Toutefois, il arrivera que l'on ne tienne pas compte de ces contraintes, au niveau de l'estimation notamment, lorsqu'elles ne nuisent pas à la définition même des fonctions de consommation envisagées.

(1) Cf. [47], chapitre III.

(2) Cf. [40] .

2. Modèles statiques, cinématiques, dynamiques

Comme on l'a vu, le caractère *statique* des explications de la consommation semi-agrégées dans le cadre de la théorie des choix suppose que toutes les variables puissent se référer à une même époque, ainsi que l'indépendance des préférences de la cellule de consommation dans le temps. Au cours d'une période donnée, pour laquelle on peut admettre la stabilité de la *structure* ⁽¹⁾ du modèle envisagé, l'approche statique se justifie par un choix approprié du découpage temporel. Ce découpage correspond le plus souvent à une subdivision de l'intervalle de temps en périodes élémentaires annuelles.

Pour un intervalle de temps suffisamment long, l'hypothèse de stabilité d'une structure ne peut en général être retenue. Dès lors, une première approche consiste à faire varier en fonction du temps les paramètres dont la valeur caractérise une structure particulière. Ce sont les *modèles cinématiques* proprement dits, qui font appel à des hypothèses de nature essentiellement descriptive ⁽²⁾ quant à l'évolution d'une structure dans le temps.

On précise, d'habitude, le contenu économique d'un modèle statique d'après les différents sous-ensembles de structures qui peuvent être envisagés a priori. Dès lors, il n'est pas sans intérêt d'analyser l'impact de variables exogènes, retardées ou non, sur certains paramètres d'un modèle statique. Aussi on qualifiera également, par extension, de cinématique un modèle visant à mettre en évidence des modifications de structure en fonction de variables exogènes autres que le temps, sans que cela ne résulte d'un comportement dynamique de la cellule de consommation.

(1) Dans ce contexte, on utilisera le mot *structure* pour désigner "la forme que prend un modèle lorsque sont fixées toutes ses caractéristiques, y compris celles qui n'étaient pas données a priori". Cf. [29], p. 61.

(2) Le temps peut être introduit de manière explicite, ou encore sous la forme d'une variable représentative du *trend*.

C'est ainsi que l'on a parfois suggéré de faire varier la structure des préférences de la cellule de consommation en fonction des variables prix ⁽¹⁾ ou dépense totale de la période élémentaire correspondante. Sous certaines conditions qu'il conviendra d'explicitier ⁽²⁾, cela revient à envisager des modèles statiques plus généraux, compatibles avec le cadre conventionnel de la théorie des choix.

On peut encore remarquer que, pour les modèles cinématiques, bien que la structure des préférences de la cellule se modifie, celles-ci restent indépendantes dans le temps.

Alors que les explications cinématiques étudient comment les structures peuvent être liées au temps, les *explications dynamiques* sont plus ambitieuses. Elles se proposent de mettre en évidence les causes des enchaînements temporels entre les variables qui caractérisent le phénomène étudié. Il s'agira notamment, à une époque donnée, de prendre en compte l'*influence des consommations passées*, d'analyser l'*incidence des plans de consommation future* et d'explicitier les *mécanismes d'adaptation* à la situation présente.

Il va de soi que, dans le cadre de modèles dynamiques, les préférences de la cellule de consommation ne sont plus forcément indépendantes dans le temps et l'on pourra être amené à reformuler le problème d'optimum du consommateur.

De même, il est évident que la classification ci-dessus, entre modèles statiques, cinématiques et dynamiques, reste sommaire et doit être nuancée à plusieurs égards.

D'une part, comme on le verra, les trois aspects d'interpénètrent souvent.

D'autre part, même si les modèles dynamiques, d'un point de vue conceptuel, généralisent les modèles statiques, il n'en est pas moins vrai que les modèles statiques permettent souvent une analyse

(1) Cf. [25] .

(2) Voir chapitre II, point 1., paragraphe 1.2 .

plus détaillée de la consommation en raison même de leur plus grande simplicité ⁽¹⁾. On observera également que, sous certaines hypothèses et conditions de régularité, les modèles dynamiques conduisent *en situation de longue période* ⁽²⁾ à des systèmes statiques, explicitant des relations d'équilibre entre les variables.

Par ailleurs, pour un horizon fini tout au moins, on peut traiter un modèle dynamique comme un modèle statique en modifiant le découpage temporel et en augmentant conjointement le nombre des variables.

3. Aperçu de quelques travaux précurseurs

Les recherches empiriques visant à l'analyse dynamique de la consommation semi-agrégée sont relativement récentes. Cela s'explique notamment en raison d'une information statistique particulièrement limitée quant à la longueur des séries de données disponibles, et par l'évolution des possibilités même du traitement de cette information.

Concernant les fondements méthodologiques de ces recherches, on est tout d'abord amené à considérer les travaux portant sur *l'étude de la demande* d'un bien ou d'un agrégat pris isolément, et sur la *fonction de consommation agrégée*. Ces travaux sont en effet liés à l'origine et au développement de la démarche économétrique.

A titre d'illustration, citons pour le début de ce siècle M. Lenoir [28] ⁽³⁾, et après la première guerre mondiale H. Schultz [42] qui, tous les deux, introduisirent explicitement le facteur temps dans l'analyse de la demande de biens alimentaires.

Il faut mentionner, un peu plus tard, les travaux d'inspiration keynésienne relatifs à la fonction de consommation, où s'illustrèrent en particulier T. Haavelmo [20], J.S. Duesenberry [13], T.M. Brown [3], et, plus récemment, M. Friedman [15]. Dans

(1) Cf. [43], pp. 385-386.

(2) Voir Chapitre II, point 4.

(3) Les références citées dans ce paragraphe ne sont évidemment pas exhaustives et sont données à titre d'illustration.

l'ensemble, ces travaux sont caractérisés par le souci de prendre en compte l'influence du passé comme facteur explicatif de la consommation. C'est ainsi que, parmi les variables explicatives interviennent des niveaux de consommation antérieurement atteints (modèles *autorégressifs*), ou encore des variables non observables telles que le *revenu normal*, que l'on spécifie en général sous la forme de variables exogènes retardées (modèles à *retards échelonnés*).

On ne saurait pas non plus ignorer les recherches concernant l'analyse de la *demande de biens durables*⁽¹⁾, qui vont inspirer les premiers travaux sur l'élaboration de modèles dynamiques de consommation au niveau semi-agrégé.

En particulier, H.S. Houthakker et L.D. Taylor [22] tiennent compte de l'influence du passé sur la consommation d'un bien par le moyen d'une *variable d'état*, représentative d'un *stock* pour un *bien durable* ou d'une *habitude de consommation* pour un *bien non durable*. Cette variable d'état est définie comme la somme actualisée, à taux constant, de tous les flux d'achats antérieurs du bien considéré. Les variables étant supposées continues par rapport au temps, Houthakker et Taylor donnent une version discrète de leur modèle fondée sur des approximations finies, et qui se présente sous la forme d'un modèle autorégressif où interviennent également des variables exogènes retardées. On reviendra au chapitre suivant sur la formulation semi-agrégée du modèle dynamique de consommation proposée par Houthakker et Taylor, qui apparaît comme une transposition de la démarche esquissée ci-dessus.

Il faut encore mentionner l'approche de Stone et Rowe [54], qui admettent l'existence d'un *niveau de consommation d'équilibre* défini en fonction d'éléments exogènes (revenu réel, prix, ...). Ils supposent de plus l'existence d'un *niveau de stock désiré*, proportionnel au niveau de consommation d'équilibre, ainsi qu'un

(1) Dans [57], G. Vangrevelinghe résume les recherches récentes dans ce domaine. Voir également R. Stone et D.A. Rowe [54], R. Stone et G. Croft-Murray [52], et H.S. Houthakker et L.D. Taylor [22], chapitre 1.

mécanisme d'adaptation tel que l'accroissement net du stock effectif soit proportionnel à la différence entre le stock désiré et le stock effectif initial. Compte tenu de dépréciations à taux constant sur le stock et les achats nouveaux, et des hypothèses ci-dessus, on montre que la demande du bien durable envisagé est une fonction linéaire du niveau de consommation d'équilibre et de la dépréciation du stock au début de la période. Dans le cas d'un bien non durable, cette dépréciation devient égale à la consommation de la période précédente. Dans [52], Stone et Croft-Murray proposent une extension de cette formulation à un système de fonctions de consommation semi-agrégées, le niveau des consommations d'équilibre étant exprimé par un système de fonctions de consommation de type statique ⁽¹⁾. Le système dynamique qui en résulte n'est plus additif.

Considérons les recherches portant sur les *fonctions de consommation semi-agrégées* dans le cadre de la *théorie des choix*.

Un premier aspect, où l'on remarquera les travaux de S. Ichimura [23], G. Tintner [56], R.L. Basman [2], W.M. Gorman [19], P.J. Kalman [25] et M. Peston [35], concerne l'analyse des effets sur les fonctions de consommation de *changements de goûts* du consommateur. Ces changements de goûts sont rendus possible par l'introduction au niveau de l'indicateur d'utilité de *variables prédéterminées*. Il s'agit principalement de types d'analyse relevant de la *statique comparative*, mettant en évidence l'impact sur les différentes consommations de modifications concernant les préférences de la cellule de consommation.

Un autre aspect se rattache aux travaux sur les systèmes statiques de fonctions de consommation, qui constituent au point de vue empirique un apport important. Prenons l'exemple du *système linéaire de dépenses*. Formulé initialement par L.R. Klein et H. Rubin [26],

(1) Stone et Croft-Murray ont retenu, dans l'application empirique qu'ils ont effectuée pour le Royaume-Uni, les fonctions du système linéaire de dépenses statique.

ce système suppose la linéarité des fonctions de dépense par rapport aux variables prix et dépense totale, ainsi que les hypothèses de la théorie des choix. P.A. Samuelson [41] et R.C. Geary [17] donnent la forme de l'indicateur d'utilité qui lui est associé. R. Stone [49] estime le système linéaire de dépenses sur la base des données du Royaume-Uni et lui confère ainsi ses lettres de noblesse dans la littérature économétrique. C'est Stone [50], ch. XIV, également qui, en 1964 ⁽¹⁾, proposa de faire varier les paramètres qui caractérisent la structure du système linéaire de dépenses, en fonction du temps ou des quantités consommées au cours des périodes antérieures, et qui estima les systèmes de fonctions auxquels il aboutit ⁽²⁾. Il faut encore remarquer l'apport fondamental de L. Solari [44], [45], [46], quant à la généralisation conceptuelle du système linéaire de dépenses et à la problématique de son estimation.

D'autres aspects seraient évidemment à considérer, notamment les recherches concernant la prise en compte des *plans de consommation future*. On reviendra en particulier sur les travaux de L. Philips [37] dans ce domaine.

4. Présentation du plan de thèse

La structuration du plan de notre thèse s'inspire des remarques esquissées aux points 1., 2. et 3. ci-dessus.

C'est ainsi que le *chapitre II* présente le *cadre théorique des formulations cinématiques et dynamiques des fonctions de consommation semi-agrégées* que nous avons envisagées.

(1) Comme on l'a déjà souligné (voir page 10), Stone et Croft-Murray [52] avaient introduit le système linéaire de dépenses dans un modèle dynamique d'adaptation dès 1959.

(2) C'est dans la même optique que se situent les travaux de R.A. Pollak et T.J. Wales [38], R.W. Parks [34], J. Dahlman et A. Klevmarken [11]. Par ailleurs, L. Philips a proposé dans [36] une formulation dynamique du système linéaire de dépenses conformément à l'approche de Houthakker et Taylor.

On traite tout d'abord des problèmes posés par des modifications de structure dans le cadre de la théorie des choix, au niveau des fonctions de consommation et au niveau des préférences du consommateur.

On aborde ensuite les formulations des modèles dynamiques dans l'optique de l'influence du passé, avec une présentation critique de l'approche préconisée par Houthakker et Taylor.

Concernant les modèles dynamiques tenant également compte de l'incidence des plans de consommation future, on décrit la voie proposée par Philips qui constitue dans ce domaine le pendant des explications dynamiques suggérées par Houthakker et Taylor. Une autre voie, que nous proposons pour traiter ce problème, consiste en particulier à introduire les plans de consommation future sous la forme de *niveaux de consommation désirée*.

Un dernier point est réservé aux questions relatives aux *équilibres de longue période* et à l'analyse des *propriétés dynamiques* de certains types de modèles de consommation.

Le *troisième chapitre* contient des exemples d'*applications* qui ont été faites à partir du *système linéaire de dépenses statique*.

Le système linéaire de dépenses statique est actuellement utilisé de manière systématique pour l'analyse de la consommation privée ⁽¹⁾ ou encore dans le cadre plus général de modèles globaux ou d'exploration à terme ⁽²⁾. Aussi ne donnera-t-on qu'un rappel succinct sur l'interprétation et le contenu économique de la version statique de ce modèle.

Les applications qui sont proposées découlent des concepts introduits au chapitre précédent. On décrit notamment des modèles tenant compte de l'influence du passé, de niveaux de consommation désirée,

(1) Voir par exemple [5], [8], [18] et [58] .

(2) Voir par exemple [10], [14] et [53] .

ainsi qu'un modèle faisant intervenir dans le problème d'optimum du consommateur un *système de prix normaux* différent du système des prix effectifs. Pour ce dernier modèle, il s'agit de mettre en évidence les réactions que peut avoir la cellule de consommation confrontée aux prix effectifs, réactions dues en particulier à une connaissance approximative du système des prix dans le cadre d'un comportement d'optimum de la théorie des choix.

Dans le *chapitre IV* des *applications* sont poursuivies, qui sont basées sur deux autres systèmes de fonctions de consommation statiques ayant aussi donné lieu à de nombreuses études empiriques⁽¹⁾: le *système linéaire de dépenses généralisé* et le *système indirect addilog*. Ces applications portent sur des modèles visant à prendre en compte l'influence du passé.

Dans ce chapitre on tente également une première comparaison des différents modèles envisagés, qui a pour but de faire ressortir les liens existants entre ces systèmes de fonctions de consommation.

Quant au *chapitre V*, il aborde les problèmes posés par la *spécification économétrique* et l'*estimation* des modèles dynamiques de consommation au niveau semi-agrégé.

On rappelle brièvement la problématique de l'estimation dans le cas des modèles statiques, qui est maintenant bien connue⁽²⁾. Etant donné une formulation déterministe d'un système de fonctions de consommation, la spécification économétrique adoptée conduit à introduire un vecteur aléatoire d'erreurs additives au niveau des fonctions de consommation en valeur. S'agissant des méthodes statistiques, qui fournissent les estimations numériques de ces fonctions, on a retenu les estimateurs des moindres carrés simples et les estimateurs du maximum de vraisemblance. Les procédures numériques correspondantes sont décrites.

(1) Voir par exemple [4], [8], [18], [34] et [47].

(2) Cf. [6] et [47], chapitre VII.

Appliquée à des modèles cinématiques ou dynamiques, la démarche résumée ci-dessus soulève des difficultés dont il est fait état. Des solutions sont ébauchées pour quelques modèles dynamiques particuliers.

Le chapitre VI relate les expériences numériques les plus intéressantes effectuées sur la base d'une ventilation en huit rubriques de la consommation privée du Royaume-Uni, période 1900/38 - 1948/67 .

Le choix de ces séries de données est dû principalement au nombre d'observations disponibles et à l'étendue même de la période d'observation.

Après une description sommaire des données utilisées, on présente les estimations des modèles qui ont été retenus. On consigne également dans ce chapitre les résultats d'une analyse par simulation des propriétés des estimateurs envisagés dans leur application à un modèle de type autorégressif.

Enfin, le chapitre VII tente d'apporter une conclusion quant à la portée opératoire de ces modèles, qui repose sur la comparaison du contenu économique des systèmes de fonctions de consommation envisagés, d'après les estimations obtenues. Il est également fait état des problèmes soulevés, qu'il y aurait lieu d'éclairer par de nouvelles recherches.

Chapitre II CADRE THEORIQUE DES FORMULATIONS CINEMATQUES ET
DYNAMIQUES DE FONCTIONS DE CONSOMMATION SEMI-AGREGÉES

1. Formulations cinématiques et dynamiques dans le cadre de la
théorie des choix

Soit dans le cadre de la théorie des choix un système de fonctions de consommation semi-agrégées de type statique. On désignera, dans ce qui suit, par θ le vecteur des k paramètres de ce système.

Les formulations cinématiques et dynamiques, contenant le plus souvent comme cas particulier le modèle statique initial, conduiront à poser :

$$(10) \quad \theta_t = \theta(z_t; \beta) \quad , \quad t=1,2,\dots,\tau \quad ,$$

où, pour la période t , z_t représente un vecteur de variables prédéterminées et β un vecteur de m paramètres, avec $m \geq k$ ⁽¹⁾.

Les paramètres θ caractérisent la structure du modèle statique et ils recouvrent en général un contenu économique concret. Comme on l'a vu, il est alors souhaitable de décrire l'évolution d'une structure dans le temps et d'en étudier les causes.

Il s'agira notamment de considérer les *changements de goûts* ou modifications de structure des préférences de la cellule de consommation, d'analyser l'impact de variables autres que les prix et la dépense totale, soit encore de faire apparaître des effets du type *formation d'habitude*, ainsi que des *substituabilités et des complémentarités dans le temps*.

- (1) Cette condition est nécessaire pour que la formulation cinématique ou dynamique envisagée généralise le modèle statique dont on est parti.

1.1. Modifications de structure au niveau des fonctions de consommation

A l'époque t les fonctions de consommation du type retenu peuvent s'écrire :

$$(11) \quad q_t = q(p_t, r_t; \theta_t) \quad ,$$

θ_t étant défini par les relations (10).

La propriété d'additivité (2) :

$$p'_t q(p_t, r_t; \theta_t) = r_t$$

est évidemment conservée pour ces fonctions. Il en va de même quant aux résultats propres à la théorie des choix conventionnelle lorsque θ_t ne dépend pas des variables exogènes p_t et r_t .

En posant :

$$z'_t = \left\| \begin{array}{c} p'_t \\ r_t \\ x'_t \end{array} \right\| \quad ,$$

où x_t désigne un vecteur de variables prédéterminées autres que p_t et r_t , on écrit le système (11) sous la forme :

$$(12) \quad q_t = \bar{q}(p_t, r_t, x_t; \beta) \quad .$$

Les relations de symétrie de Slutsky pour ces fonctions supposent que :

$$(13) \quad \bar{s}_t = \bar{s}'_t \quad ,$$

avec
$$\bar{s}_t = \frac{\partial \bar{q}}{\partial p'_t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial r_t} q'_t \quad .$$

On a :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial p'_t} = \frac{\partial q}{\partial p'_t} + \frac{\partial q}{\partial \theta'_t} \frac{\partial \theta}{\partial p'_t} ,$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial r'_t} = \frac{\partial q}{\partial r'_t} + \frac{\partial q}{\partial \theta'_t} \frac{\partial \theta}{\partial r'_t} ,$$

d'où :

$$\bar{S}_t = \frac{\partial q}{\partial p'_t} + \frac{\partial q}{\partial r'_t} q'_t + \frac{\partial q}{\partial \theta'_t} \left[\frac{\partial \theta}{\partial p'_t} + \frac{\partial \theta}{\partial r'_t} q'_t \right] .$$

En posant :

$$S_t = \frac{\partial q}{\partial p'_t} + \frac{\partial q}{\partial r'_t} q'_t , \text{ et}$$

$$K_t = \frac{\partial q}{\partial \theta'_t} \left[\frac{\partial \theta}{\partial p'_t} + \frac{\partial \theta}{\partial r'_t} q'_t \right] ,$$

comme, par hypothèse $S_t = S'_t$, il vient :

$$(14) \quad \bar{S}_t = \bar{S}'_t \quad \Leftrightarrow \quad K_t = K'_t .$$

Ces relations et l'additivité impliquent évidemment l'homogénéité de degré zéro des fonctions de consommation (12). Toutefois, en vertu de l'identité d'Euler, cette dernière propriété est vérifiée dès que :

$$(15) \quad K_t p_t = 0 .$$

D'autre part, on sait que les relations (13) assurent l'existence d'une classe parétienne d'indicateurs :

$$(16) \quad w_t = w(q_t; x_t, \beta) \quad ,$$

et pourvu que :

$$\frac{\partial w}{\partial q_t} > 0 \quad \wedge \quad \forall y \neq kp_t \quad , \quad y' \bar{S}_t y < 0 \quad ,$$

les fonctions de consommation (12) sont compatibles avec les hypothèses de la théorie des choix.

D'après la démarche ci-dessus, on est conduit à une classe parétienne d'indicateurs d'utilité plus générale, qui contient donc comme cas particulier la classe parétienne d'indicateurs du modèle statique initial ⁽¹⁾.

En particulier, dans le cas d'un modèle statique donnant lieu à certaines restrictions quant aux possibilités de substitution ou de complémentarité pures, exprimées notamment par le signe des éléments non diagonaux de la matrice S_t , la relation :

$$\bar{S}_t = S_t + K_t \quad ,$$

montre qu'un choix judicieux des fonctions θ ⁽²⁾ permet de s'affranchir de ce type de restrictions.

1.2 Modifications de structure au niveau des préférences de la cellule de consommation

Considérons l'indicateur d'utilité :

$$(17) \quad u_t = u(q_t; \theta_t) \quad ,$$

quasi-concave au sens strict par rapport à q_t . Le système statique

(1) On trouvera, par exemple, dans la généralisation du modèle SLD au modèle SLDG une illustration simple de cette démarche.
Voir page 87.

(2) Voir par exemple [33] .

de fonctions de consommation du type (11) :

$$q_t = q(p_t, r_t; \theta_t) ,$$

est alors solution unique des conditions du premier ordre :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial q_t} = \lambda_t p_t \\ p_t' q_t = r_t \end{array} \right. ,$$

λ_t étant un multiplicateur de Lagrange.

Par référence aux *relations fondamentales de la théorie des choix* ⁽¹⁾, il importe d'étudier l'effet sur les fonctions de consommation d'une variation marginale de la structure des préférences de la cellule de consommation. Dans ce but, on recourt aux *relations dites de Tintner-Ichimura* ⁽²⁾, qui s'écrivent, en omettant l'indice t de la période :

$$(19) \quad \frac{\partial q}{\partial \theta'} = - \frac{1}{\lambda} S U_{\theta} ,$$

où S est la matrice de Slutsky :

$$S = \frac{\partial q}{\partial p'} + \frac{\partial q}{\partial r} q' ,$$

$$\text{et} \quad U_{\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial \theta'} .$$

Comme $p'S = (Sp)' = 0'$, on a évidemment :

$$(20) \quad p' \frac{\partial q}{\partial \theta'} = 0' .$$

En terme d'élasticité, les relations (19) s'écrivent :

$$(21) \quad \xi(q/\theta') = - H^* \xi\left(\frac{\partial u}{\partial q} / \theta'\right) \quad (3) ,$$

(1) Cf. [47], pp. 18-21.

(2) Cf. [23], [56]. Pour une justification de ces relations, voir page 23, note (1) .

(3) ξ désigne l'opérateur *élasticité*. Cf. [47], chapitre I, §1.

avec $\omega' \mathcal{E}(q / \theta') = 0'$,

$H^* = q^{-1} S p$ étant la matrice des *élasticités-prix pures*, et $\omega = r^{-1} p q$ le vecteur des *coefficients budgétaires*. On reviendra sur l'interprétation de ces relations. Il convient cependant de vérifier qu'elles sont invariantes dans une transformation parétienne de l'indicateur d'utilité ⁽¹⁾.

Soit alors l'indicateur :

$$w = F [u(q; \theta)] ,$$

avec $F' > 0$ (2) .

Les conditions d'optimum s'écrivent :

$$\begin{cases} F' \frac{\partial u}{\partial q} = \mu p \\ p' q = r \end{cases} .$$

En posant $\lambda = \frac{\mu}{F'}$, on retrouve donc les conditions (18) qui définissent les fonctions de consommation. D'autre part, on sait que les éléments de la matrice S sont invariants pour une transformation parétienne F de l'indicateur $u(q; \theta)$. Ainsi, il reste à montrer que la relation (19) est conservée.

Pour l'indicateur $w = w(q; \theta)$ on a :

$$\frac{\partial q}{\partial \theta'} = - \frac{1}{\mu} S w_{\theta} ,$$

avec
$$w_{\theta} = \frac{\partial^2 w}{\partial q \partial \theta'} .$$

Or $\mu = \lambda F'$ et

$$w_{\theta} = F' U_{\theta} + F'' \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial \theta'} .$$

(1) Dans [31], M.W.F. Massy pense qu'il n'en est pas ainsi.

(2) Sans risque de confusion, on notera dans ce qui suit par F' et F'' les dérivées première et seconde de F par rapport à u.

Comme $S \frac{\partial u}{\partial q} = \lambda S p = 0$,

il vient :

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = - \frac{1}{\lambda} S U_{\theta} .$$

Dépassant le cadre conventionnel de la théorie des choix, l'approche proposée par Kalman ⁽¹⁾ revient à admettre que la structure des préférences de la cellule de consommation se modifie en fonction des prix.

Soit alors, pour $\theta = \theta(p, r, x)$ l'indicateur :

$$(22) \quad u = u(q; \theta) = \bar{u}(q; p, r, x) .$$

qui tient également compte de la dépense totale r et de variables prédéterminées x . Le comportement optimisant du consommateur, que traquissent les conditions ⁽²⁾ :

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} = \lambda p , \\ p'q = r , \end{cases}$$

conduit aux fonctions de consommation :

$$(24) \quad q = \bar{q}(p, r, x) .$$

(1) Cf. [25] .

(2) $\bar{u}$ est évidemment quasi-concave au sens strict par rapport à q , car en effet :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial q \partial q} = U_q ,$$

et les conditions d'optimum [23] sont les mêmes que celles exprimées par [18] .

Afin d'établir l'effet d'une variation marginale des variables p , r et x , on peut écrire à partir de (23) ci-dessus, les différentielles totales suivantes :

$$(25) \quad \begin{cases} \bar{U}_q dq + \bar{U}_p dp + \bar{U}_r dr + \bar{U}_x dx = p d\lambda + \lambda dp \\ p' dq + q' dp = dr \end{cases},$$

où l'on pose :

$$\bar{U}_q = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial q \partial q}, \quad \bar{U}_p = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial q \partial p}, \quad \bar{U}_r = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial q \partial r} \quad \text{et} \quad \bar{U}_x = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial q \partial x}.$$

Les relations (25) sous la forme de produits de matrices partitionnées :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_q & p \\ p' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq \\ -d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I - \bar{U}_p & -\bar{U}_r & -\bar{U}_x \\ -q' & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dr \\ dx \end{pmatrix},$$

permettant d'expliciter dq et $d\lambda$ en prémultipliant l'expression ci-dessus par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_q & p \\ p' & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & v \\ v' & w \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} dq &= [v (\lambda I - \bar{U}_p) - vq'] dp + [v - v\bar{U}_r] dr - v \bar{U}_x dx, \quad \text{et} \\ -d\lambda &= [v' (\lambda I - \bar{U}_p) - wq'] dp + [w - v'\bar{U}_r] dr - v' \bar{U}_x dx. \end{aligned}$$

On a en particulier :

$$(26) \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial p'} = V(\lambda I - \bar{U}_p) - vq' ,$$

$$(27) \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} = v - V \bar{u}_r \quad \text{et}$$

$$(28) \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial x'} = - V \bar{U}_x \quad (1) .$$

L'homogénéité de degré zéro des fonctions de consommation (24) s'exprime par l'identité d'Euler :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial p'} p + \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} r = 0 ,$$

d'où, compte tenu des relations (26) et (27) , la condition nécessaire et suffisante :

$$V [\bar{U}_p p + \bar{u}_r r] = 0 ,$$

car $Vp = 0$.

Quant aux relations de symétrie de Slutsky :

$$\bar{S} = \bar{S}'$$

avec

$$\bar{S} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial p'} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} q' ,$$

elles seront satisfaites si et seulement si :

$$V (\bar{U}_p + \bar{u}_r q') = [V (\bar{U}_p + \bar{u}_r q')] ' ,$$

$$\text{car } \bar{S} = \lambda V - V (\bar{U}_p + \bar{u}_r q') \quad \text{et} \quad V = V' .$$

On établit aisément l'équivalence de ces conditions avec les conditions (14) et (15).

(1) La relation (19) (voir page 19) est de même forme que la relation (28) et s'obtient de manière analogue.

Pour l'indicateur d'utilité $u(q; \theta)$ associé aux fonctions de consommation $q(p, r; \theta)$, on vérifie en effet que :

$$S = \lambda V \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = - V U_{\theta} \quad .$$

Dès lors :

$$(29) \quad \frac{\partial q}{\partial \theta}, \frac{\partial \theta}{\partial p} = - V U_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = - V \bar{U}_p \quad ,$$

$$(30) \quad \frac{\partial q}{\partial \theta}, \frac{\partial \theta}{\partial r} = - V U_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} = - V \bar{U}_r \quad , \quad \text{et}$$

$$K = \frac{\partial q}{\partial \theta}, \left[\frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial r} q' \right] = - V (\bar{U}_p + \bar{U}_r q') \quad .$$

On a encore :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial \theta}, \frac{\partial \theta}{\partial x} = - V U_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = - V \bar{U}_x \quad ,$$

$$\text{avec} \quad p', \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0' \quad .$$

Ces relations éclairent l'effet sur les fonctions de consommation d'une variation des variables prédéterminées, modifiant la structure des préférences de la cellule de consommation. Elles sont évidemment invariantes dans une transformation parétienne de l'indicateur d'utilité (1).

On a en particulier décomposé l'effet pur d'une variation de prix :

$$\bar{S} = S + K \quad ,$$

mettant ainsi en évidence l'effet K dû à la modification des paramètres qui caractérisent la structure du modèle statique initial.

(1) Cela ressort clairement de la forme même des relations (26) à (30), compte tenu du fait que (19) est également invariante dans une transformation parétienne (voir page 20).

D'autres aspects pourraient encore être à considérer.

Citons par exemple le problème posé par l'étude d'une variation marginale d'un paramètre générique θ_i au niveau des éléments de la matrice S. Les relations que l'on obtient alors sont complexes :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} V + \lambda \frac{\partial V}{\partial \theta_i} \quad , \quad \text{avec}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = - V \frac{\partial U}{\partial \theta_i} V \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} = - V' \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_i \partial q} \quad ,$$

et leur interprétation n'est guère aisée.

2. Influences du passé et formations d'habitudes de consommation

On a admis que la structure des préférences de la cellule de consommation se modifiait au cours du temps. L'une des causes essentielles de cette évolution se fonde sur l'influence de la mémoire que l'on garde du passé. Il y a évidemment plusieurs types de formulation possible de cette influence, dont celle proposée par Houthakker et Taylor ⁽¹⁾.

2.1 La voie proposée par Houthakker et Taylor ⁽²⁾

Considérant des variations continues des variables par rapport au temps, Houthakker et Taylor supposent qu'à l'instant t les préférences du consommateur sont fonction de variables d'état s(t) :

$$(31) \quad u_{(t)} = u [q_{(t)} , s_{(t)}] \quad .$$

Les variables s(t) sont représentatives de stocks de biens ou d'habitudes formés antérieurement. Plus précisément, l'utilité

(1) On a déjà fait état de cette formulation dans le cas de l'analyse de la demande d'un bien pris isolément (voir page 9).

(2) Cf. [22] , chapitre 5 .

marginale d'un bien durable est supposée décroissante en fonction de son stock :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_{i(t)} \partial s_{i(t)}} < 0 \quad ,$$

alors que l'accroissement d'un stock d'habitudes, propre à un bien non durable, a pour effet d'augmenter son utilité marginale :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_{j(t)} \partial s_{j(t)}} > 0 \quad .$$

A l'instant t , le problème d'optimum du consommateur conduit aux relations :

$$(32) \quad \frac{\partial u}{\partial q_{(t)}} = \lambda_{(t)} p_{(t)} \quad ,$$

qui, compte tenu de la contrainte d'additivité :

$$p'_{(t)} q_{(t)} = r_{(t)} \quad ,$$

définissent implicitement les fonctions de consommation :

$$(33) \quad q_{(t)} = q(p_{(t)}, r_{(t)}, s_{(t)}) \quad .$$

D'un point de vue expérimental, les variables $s_{(t)}$ ne sont pas mesurables. Il en va d'ailleurs de même des variables $q_{(t)}$, $p_{(t)}$ et $r_{(t)}$ qui sont des fonctions continues du temps.

Afin de pallier le premier de ces inconvénients, Houthakker et Taylor spécifient que la variation instantanée de $s_{(t)}$ est donnée par la différence entre les achats nouveaux $q_{(t)}$ et les montants des dépréciations sur les stocks, mesurés à taux constants, soit :

$$(34) \quad \frac{ds}{dt} = q_{(t)} - \delta s_{(t)} \quad ,$$

où δ est le vecteur des taux de dépréciation. Par intégration, cela équivaut à définir un élément générique $s_{i(t)}$ du vecteur $s_{(t)}$ comme étant la somme, actualisée au taux δ_i , de tous les flux d'achat antérieurs pour le i -ème bien :

$$(35) \quad s_{i(t)} = \int_0^t q_{i(\tau)} e^{-\delta_i(t-\tau)} d\tau \quad .$$

On montre alors, sous certaines conditions ⁽¹⁾ quant à l'indicateur d'utilité (31), que les fonctions de consommation envisagées découlent d'un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dq}{dt} = h(q_{(t)}, p_{(t)}^*, \frac{dp^*}{dt}) \quad ,$$

avec $p_{(t)}^* = \lambda_{(t)} p_{(t)}$, $\lambda_{(t)}$ étant défini par additivité.

Quant au deuxième inconvénient, Houthakker et Taylor suggèrent des approximations finies qui, dans certains cas ⁽²⁾, conduisent à une version discrète du modèle, de la forme :

$$(36) \quad q_t = q(q_{t-1}, \lambda_t p_t, \lambda_{t-1} p_{t-1}) \quad .$$

Pour une valeur initiale λ_0 donnée, ce qui revient à faire le choix d'un indicateur d'utilité particulier parmi ceux de la classe parétienne envisagée, la suite des λ_t résulte de l'additivité $p_t' q_t = r_t$.

(1) On requiert en général que les conditions (32) expriment $q_{(t)}$ comme fonction linéaire de $s_{(t)}$ et de $\lambda_{(t)} p_{(t)}$ (indicateur d'utilité quadratique), ou encore comme fonction linéaire de $s_{(t)}$ et de $(\lambda_{(t)} \check{p}_{(t)})^{-1}$ (indicateur du système linéaire de dépenses). Cf. [36], [55] et [22], chapitre 5.

(2) Partant d'un modèle où les variables sont des fonctions continues du temps, la démarche conduisant à une version discrète du modèle peut être envisagée comme un problème d'agrégation dans le temps. Voir également la note (1) ci-dessus.

Concernant ce dernier point, il faut remarquer la solution proposée par A. Mattei ⁽¹⁾, qui conduit également à des fonctions de consommation du type (36), et qui se fonde sur son approche discrète de la formulation de Houthakker et Taylor. Notamment, à l'époque t , les préférences du consommateur se modifient en fonction des stocks existant à la fin de la période précédente :

$$u_t = u(q_t, s_{t-1}) \quad ,$$

alors que s_{t-1} est défini par l'équation aux différences :

$$(37) \quad s_{t-1} = \check{\alpha} q_{t-1} + \check{\gamma} s_{t-2} \quad ,$$

avec $|\gamma_i| < 1$, $i=1,2,\dots,n$. s_{t-1} peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(38) \quad s_{t-1} = \check{\alpha} \sum_{\tau=0}^{\infty} (\check{\gamma})^{\tau} q_{t-\tau-1} \quad .$$

γ s'interprète comme le vecteur des taux de dépréciation sur les stocks tandis que α apparaît comme le vecteur des coefficients d'accumulation, sous forme de stocks, des achats nouveaux. On peut remarquer qu'au point de vue de l'analyse dimensionnelle, α et γ ne sont pas comparables. En effet, les éléments du vecteur γ sont sans dimension alors que les éléments du vecteur α ont la dimension du temps ⁽²⁾.

L'avantage de cette formulation discrète réside en particulier dans le fait qu'elle éclaire le passage de la forme des fonctions de consommation (33) à la forme (36). Par contre, lorsque les conditions d'optimum :

$$\frac{\partial u}{\partial q_t} = \lambda_t p_t \quad ,$$

(1) Cf. [32].

(2) On ne saurait donc, comme l'a proposé A. Mattei (cf. [32], pp. 464-465), exprimer α en fonction de γ sans tenir compte de la dimension de ces paramètres.

peuvent s'écrire :

$$h(q_t, p_t, \lambda_t, k^* s_{t-1}) = 0 \quad (1)$$

où k^* est un vecteur de paramètres, la relation (38) montre que le vecteur de coefficients α n'est pas *identifiable* (2) .

Enfin, concernant la distinction entre biens durables et non durables telle que l'ont proposée Houthakker et Taylor, on peut observer que les biens durables engendrent également des habitudes de consommation. A ce point de vue, il paraît vain de vouloir distinguer les biens durables des biens non-durables, et ceci d'autant plus que l'on se situe dans le contexte de la consommation semi-agrégée.

2.2 Influences du passé et habitudes de consommation

La formulation que l'on va présenter admet des variations discrètes des variables par rapport au temps. Elle se distingue de la voie préconisée par Houthakker et Taylor à deux égards. D'une part elle se fonde sur une généralisation conceptuelle de la définition des variables d'état donnée par les relations (38). D'autre part, considérant l'évidence que les comportements passés restreignent le champ de choix de la cellule de consommation, on propose une formulation simple quant à l'introduction des variables d'état au niveau de l'indicateur d'utilité, qui, comme on le verra, s'avère également fructueuse pour la recherche de nouvelles formes de fonctions de consommation.

A l'époque t , soit c_t un vecteur de variables traduisant l'état hérité du passé. On posera en général :

(1) C'est notamment le cas dans les applications empiriques proposées. Voir par exemple [55].

(2) Voir également note (2), page 28 .

$$(39) \quad c_t = c(q_{t-1}, \dots, q_{t-k}, x_t) \quad , \quad k \geq 1 \quad ,$$

x_t étant un vecteur de variables exogènes autres que p_t et r_t .

Les restrictions introduites sur le champ de choix sont définies par :

$$q_t \geq \max. \{c_t; 0\} \quad (1) \quad , \text{ telles que}$$

$$q_{it} \geq c_{it} \quad , \quad i \in I_1 = \{1, 2, \dots, g\} \text{ et}$$

$$q_{it} \geq 0 \quad , \quad i \in I_2 = \{g+1, \dots, n\} \quad .$$

Pour les biens d'indices $i \in I_1$, les variables $c_{it} > 0$ représentent, au sens des *formations d'habitudes*, des quantités de *consommation obligée*. Les $c_{it} > 0$ se rattachent donc à la notion de *biens de consommation courante* ou *biens de première nécessité*, et constituent en grande partie la composante permanente de la consommation, peu sensible aux fluctuations conjoncturelles. Quant aux biens d'indices $i \in I_2$ tels que $c_{it} < 0$, ils ne donnent pas lieu à des consommations obligées et on les qualifiera, par opposition, de *biens supérieurs* ⁽²⁾.

Pour ce champ de choix et un indicateur d'utilité u quasi-concave au sens strict par rapport à q_t , le problème d'optimum du consommateur s'écrit dès lors:

$$(40) \quad \begin{cases} \max. u(q_t - c_t) & , \\ q_t & \\ p'_t q_t = r_t & . \end{cases}$$

Il en résulte les conditions du premier ordre :

(1) Pour deux vecteurs x et y de même dimension, on définit :

$$\max. \{x, y\} = \|\max. \{x_i, y_i\}\| \quad .$$

(2) On verra en fait, dans les applications, que les variables $c_{it} < 0$ définissent des *seuils d'accession* à la consommation (par rapport aux niveaux des prix et de la dépense totale), qui, dans certains cas peuvent être hiérarchisés.

$$p'_t q_t = r_t \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_t} \leq \lambda_t p_t \quad , \quad \text{avec}$$

$$(q_{it} - c_{it}) \left[\frac{\partial u}{\partial q_{it}} - \lambda_t p_{it} \right] = 0 \quad , \quad i \in I_1 \quad , \quad \text{et}$$

$$q_{it} \left[\frac{\partial u}{\partial q_{it}} - \lambda_t p_{it} \right] = 0 \quad , \quad i \in I_2 \quad ,$$

qui, compte tenu des relations (39), définissent les fonctions de consommation q .

Dès maintenant, on admettra que ces conditions conduisent à une solution de la forme :

$$q_t = q(p_t, r_t; c_t) \quad ,$$

avec :

$$\forall_t, q_t \geq \max. \{c_t; 0\} \quad .$$

On suppose ainsi des niveaux de prix et de dépense totale tels que tous les biens envisagés sont effectivement consommés, et l'on exclut en particulier les situations liées à l'apparition ou à la disparition de certains biens ⁽¹⁾.

En vue des applications, il est commode d'effectuer le changement de variable suivant :

$$e_t = q_t - c_t \quad ,$$

qui permet d'écrire les fonctions de consommation ci-dessus sous la forme :

$$(41) \quad q_t = c_t + e(p_t, r_t - p'_t c_t) \quad ,$$

$$\text{où} \quad e_t = e(p_t, r_t - p'_t c_t) \quad .$$

(1) Dans les applications empiriques, cette hypothèse ne sera en général restrictive qu'en vue de l'exploration. Il conviendrait, dans ce cas, d'étudier des solutions telles que :

$$q_t \geq \max. \{c_t; 0\} \quad ,$$

suivant l'indicateur d'utilité retenu.

Pour le domaine de définition :

$$e_t > \max. \{0; -c_t\} \quad ,$$

et la contrainte d'additivité :

$$p'_t e_t = r_t - p'_t c_t \quad ,$$

les fonctions e résultent du problème d'optimum :

$$(42) \quad \begin{cases} \max. u(e_t) \\ e_t \\ p'_t e_t = y_t \end{cases} \quad ,$$

$$\text{où } y_t = r_t - p'_t c_t > 0 \quad .$$

Elles jouissent donc des mêmes propriétés qu'un système de fonctions de consommation dans le cadre de la théorie des choix.

Dès lors, on peut déduire de tout modèle statique dont on connaît un des indicateurs d'utilité directe, une formulation dynamique correspondante, où les variables c_t définies par les relations (39) traduisent l'état hérité du passé. Par ailleurs, les relations suivantes :

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{\partial q}{\partial p'_t} = \frac{\partial e}{\partial p'_t} - \frac{\partial e}{\partial y_t} c'_t \quad , \\ \frac{\partial q}{\partial r_t} = \frac{\partial e}{\partial y_t} \quad \text{et} \\ S_t = \frac{\partial q}{\partial p'_t} + \frac{\partial q}{\partial r_t} q'_t = \frac{\partial e}{\partial p'_t} + \frac{\partial e}{\partial y_t} e'_t \quad , \end{cases}$$

facilitent l'interprétation de la version dynamique du modèle statique considéré.

Il sera également utile, en vue des applications, d'envisager le problème dual du problème d'optimum (42) ci-dessus. En vertu de

l'homogénéité de degré zéro des fonctions $e_t = e(p_t, y_t)$ par rapport aux variables p_t et y_t , on peut écrire :

$$e_t = e(\bar{\pi}_t) ,$$

avec $\bar{\pi}_t = y_t^{-1} p_t$. Ainsi, en définissant la fonction :

$$\psi(\bar{\pi}_t) = u [e(\bar{\pi}_t)] ,$$

on a le problème dual :

$$(44) \quad \begin{cases} \min. \psi(\bar{\pi}_t) \\ \bar{\pi}_t \\ \bar{\pi}_t' e_t = 1 \end{cases} ,$$

qui, à l'aide du théorème de Roy (9), permet d'expliciter directement e_t en fonction de $\bar{\pi}_t$.

Dès lors, si l'on connaît un indicateur dual ψ rattaché à un système de fonctions de consommation statique, le problème (44) conduit à une formulation dynamique de ce système tenant compte, grâce aux variables c_t , de l'état hérité du passé.

Comme :

$$\bar{\pi}_t = (1 - \pi_t' c_t)^{-1} \pi_t ,$$

avec $\pi_t = r_t^{-1} p_t$, on vérifie ⁽¹⁾ encore qu'en posant :

$$\varphi(\pi_t) = \psi [(1 - \pi_t' c_t)^{-1} \pi_t] \quad (2)$$

l'on obtient le problème dual du problème d'optimum (40) :

(1) On a évidemment :

$$q_t - c_t = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\pi}_t}, \bar{\pi}_t \right)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\pi}_t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_t}, \pi_t \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_t} - c_t .$$

(2) Notre collègue F. Carlevaro a bien voulu nous suggérer d'appliquer notre approche à l'indicateur du système

"Indirect Addilog" (voir p. 97).

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min. \varphi(\pi_t) \\ \pi_t \\ \pi_t' q_t = 1 \end{array} \right. ,$$

qui de même définit directement q_t étant donné c_t .

On en déduit notamment que si la fonction ψ est quasi-convexe au sens strict par rapport à π_t , l'indicateur φ est quasi-convexe au sens strict par rapport à π_t .

La mise en évidence des *effets d'habitude* découle de la spécification (39) :

$$c_t = c(q_{t-1}, \dots, q_{t-k}, x_t) ,$$

et éclaire en particulier l'influence des consommations antérieures sur les consommations obligées de l'époque t .

En posant $k = 1$ et $x_t =$ constante dans l'expression ci-dessus, comme on le fait le plus souvent dans les applications empiriques, on admet que q_{t-1} résume de manière exhaustive l'état hérité du passé. Dans ce cas, les éléments diagonaux de la matrice :

$$C_t = \frac{\partial c}{\partial q_{t-1}} ,$$

explicitent les *effets directs de formation ou d'effacement d'habitudes*, suivant leur signe positif ou négatif, respectivement.

Les éléments non-diagonaux font apparaître les liaisons indirectes dues à des effets de complémentarité et de substituabilité au niveau des habitudes.

Quant aux *complémentarités et substituabilités dans le temps* entre les différentes fonctions de consommation, elles découlent du signe des éléments de la matrice :

$$\frac{\partial q}{\partial q_{t-1}} = \left(I - \frac{\partial e}{\partial y_t} p_t' \right) C_t .$$

Le sens *temporel* de ces effets suppose alors un délai de réaction égal à la longueur de la période élémentaire retenue. ,

En écrivant la relation ci-dessus sous la forme :

$$C_t = \frac{\partial q}{\partial q'_t} + \frac{\partial q}{\partial r_t} p'_t C_t ,$$

on remarque que les effets d'habitudes résultent des effets de complémentarité et de substituabilité dans le temps après élimination de l'effet-dépense totale dû aux variables C_t , égal à

$(-\frac{\partial q}{\partial r_t} p'_t C_t)$. Les effets de complémentarité et de substituabilité dans le temps correspondent ainsi à la notion d'effets *apparents* par rapport aux variations de q_{t-1} , et les effets d'habitudes aux effets *purs* ⁽¹⁾. Toutefois, en raison de l'additivité qui implique :

$$p'_t \frac{\partial q}{\partial r_t} = 1 ,$$

la matrice $I - \frac{\partial q}{\partial r_t} p'_t$ est singulière, et l'on ne pourra pas identifier les effets d'habitudes à partir des éléments de la matrice

$$\frac{\partial q}{\partial q'_{t-1}} .$$

On retrouve bien évidemment ces relations entre effets purs et effets apparents à partir des relations :

$$u [q - c(\theta)] = u_0 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \lambda p ,$$

où, en mettant l'indice t de la période, on a posé $\theta = q_{t-1}$. L'effet d'une variation marginale des variables θ résulte du système ⁽²⁾ :

$$U_q dq + U_\theta d\theta = p d\lambda ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} dq + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta = 0 \Leftrightarrow p' dq - p' \frac{\partial c}{\partial \theta} d\theta = 0 .$$

En particulier. il vient :

$$dq = [-v U_\theta + v p' \frac{\partial c}{\partial \theta}] d\theta .$$

(1) Cette distinction, entre effets apparents et purs s'inspire de la distinction entre effets-prix apparents et effets-prix purs, et relève d'une démarche similaire. Cf. [47], pp. 22-23.

(2) Les notations sont celles introduites au point ci-dessus.

Comme, dans ce cas :

$$v = \frac{\partial q}{\partial r} ,$$

et, d'après les relations de Tintner-Ichimura, on a les effets apparents :

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = - V U_{\theta} ,$$

à niveau de satisfaction constant, l'effet d'une variation marginale des variables q_{t-1} résulte :

$$dq = \left[\frac{\partial q}{\partial q_{t-1}} + \frac{\partial q}{\partial r_t} p'_t C_t \right] d q_{t-1} ,$$

soit encore :

$$dq = C_t d q_{t-1} .$$

Ces concepts se transposent aisément pour $k > 1$ (1) .

A titre d'illustration, considérons les deux spécifications suivantes pour c_t .

$$a) \quad c_t = c^0 + c^1 q_{t-1} ,$$

c^0 et c^1 étant des vecteurs de paramètres. On a évidemment $C_t = c^1$ et les paramètres c^1 explicitent les effets directs d'habitudes. Pour $|c^1_i| < 1$, $i=1,2,\dots,n$, on peut écrire :

$$c_t = (I - c^1)^{-1} c^0 + \sum_{\tau=1}^{\infty} (c^1)^{\tau} e(p_{t-\tau}, y_{t-\tau}) \quad (2) ,$$

(1) Voir l'exemple de la spécification b) ci-après.

(2) Cela suppose que les $e_{t-\tau} = e(p_{t-\tau}, y_{t-\tau})$ sont bornés.

relation qui met en évidence l'influence des comportements passés dans la formation des habitudes.

$$b) \quad c_t = c^* + \check{k} \sum_{\tau=0}^{\infty} (\check{\gamma})^{\tau} q_{t-\tau-1} ,$$

avec $|\gamma_i| < 1$, $i=1,2,\dots,n$, où c^0 , k et γ sont des vecteurs de paramètres.

Cette spécification peut également s'écrire sous les deux formes équivalentes :

$$- \quad c_t = c^* + \check{k}^* s_{t-1} ,$$

s_{t-1} étant défini par les relations (38) :

$$s_{t-1} = \check{\alpha} \sum_{\tau=0}^{\infty} (\check{\gamma})^{\tau} q_{t-\tau-1} ,$$

avec $\check{k} = \check{k}^* \check{\alpha} \quad (1) ;$

$$- \quad c_t = \check{\gamma} c_{t-1} + \check{k} q_{t-1} + (I - \check{\gamma}) c^* \quad (2) .$$

Dans ce cas, les effets d'habitudes s'explicitent à l'époque t , suivant leur ordre temporel, d'après le signe des éléments diagonaux des matrices :

$$C_t^{(\tau+1)} = \frac{\partial c}{\partial q_{t-(\tau+1)}} = \check{k} (\check{\gamma})^{\tau} , \quad \tau=0,1,2,\dots,$$

et l'on pourra en particulier étudier les effets d'habitudes sur

-
- (1) On retrouve là une formulation discrète, dans la voie proposée par Houthakker et Taylor, qui peut être envisagée d'après les concepts ci-dessus. On remarque que seuls les paramètres k sont identifiables. Par ailleurs, on ne saurait poser, dans ce cadre,

$$c_t = c^* + s_{t-1} ,$$

expression incorrecte du point de vue de l'analyse dimensionnelle.

- (2) On reviendra, dans les applications, sur l'interprétation économique et l'intérêt de ces spécifications.

plusieurs périodes :

$$\bar{C}^{(\theta)} = \sum_{\tau=0}^{\theta-1} \sum_k \bar{v}_k (\bar{Y})^\tau, \quad ,$$

soit :

$$\bar{C}^{(\theta)} = \sum_k (I - \bar{Y})^{-1} [I - (\bar{Y})^\theta] \quad .$$

Dans le même ordre d'idées, il n'est pas sans intérêt de considérer

la suite :

$$\frac{\partial q}{\partial q'_{t-(\tau+1)}} = (I - \frac{\partial q}{\partial r_t} p'_t) C_t^{(\tau+1)}, \quad \tau=0,1,2,\dots$$

qui définit les complémentarités et les substituabilités dans le temps entre les différents biens.

3. Incidence des plans de consommation future

La prise en compte des *plans de consommation future* dans le cadre d'un modèle dynamique de fonctions de consommation semi-agrégées soulèvent des problèmes d'ordre méthodologique quant à la formulation du modèle, et d'ordre expérimental quant à son estimation. Aussi les travaux se rapportant à ce sujet sont récents et peu nombreux.

3.1 L'approche de Philips ⁽¹⁾

Le point de départ de cette approche se fonde sur les travaux de Houthakker et Taylor dont on a fait état au point 2. ci-dessus. On suppose que toutes les variables sont continues par rapport au temps et l'on admet l'existence d'un indicateur d'utilité instantané de la forme (31) :

(1) Cf. [37] .

$$u_t = u [q_{(t)}, s_{(t)}]$$

strictement concave par rapport à $q_{(t)}$. Les variables $s_{(t)}$ représentent des stocks de biens durables ou d'habitudes de consommation, tenant ainsi compte de l'influence du passé, et décrivent l'état du système, dont l'évolution est donnée par des équations différentielles du type (34):

$$\frac{ds}{dt} = q_{(t)} - \delta s_{(t)} \quad ,$$

où δ est le vecteur des taux de dépréciation sur les stocks. Philips introduit conjointement une dernière variable d'état $w_{(t)}$ représentant les *actifs et engagements financiers* de la cellule de consommation, dont l'évolution est donnée par :

$$(46) \quad \frac{dw}{dt} = i_{(t)} w_{(t)} + r^*_{(t)} - p'_{(t)} q_{(t)} \quad .$$

Cette relation définit l'épargne $\frac{dw}{dt}$; $i_{(t)}$ désigne un *indice* des taux d'intérêt et $r^*_{(t)}$ le *revenu disponible* du consommateur.

Quant au comportement de la cellule de consommation, on suppose qu'elle maximise sur un horizon infini la somme de ses flux d'utilités escomptés ⁽¹⁾ à un instant donné d'après un *taux subjectif* κ constant, et compte tenu des contraintes du type (34) et (46) ci-dessus. Il s'agit donc de déterminer un choix de consommations $q^*_{(t)}$ pour $t \geq 0$ de telle sorte que ⁽²⁾ :

$$\int_0^{\infty} u [q_{(t)}, s_{(t)}] \exp. (-\kappa t) dt$$

soit maximum, avec :

$$\frac{ds}{dt} = q_{(t)} - \delta s_{(t)} \quad \text{et}$$

$$\frac{dw}{dt} = i_{(t)} w_{(t)} + r^*_{(t)} - p'_{(t)} q_{(t)} \quad .$$

(1) Cette condition est nécessaire pour assurer l'existence de la fonction critère.

(2) $q_{(t)}$ joue le rôle d'un vecteur de *variables de contrôle*.

En utilisant le *principe du Maximum* de Pontryagin ⁽¹⁾, on est conduit à un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{d\psi}{dt} = \kappa \psi(t) - \left(\frac{\partial u}{\partial s}(t) - \delta \psi(t) \right) ,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(t) (\kappa - i(t)) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial q}(t) + \psi(t) = \lambda(t) P(t) ,$$

qui, conjointement aux relations (34) et (46) définit implicitement les variables optimales $q^*(t)$ et $s^*(t)$ ⁽²⁾.

Phlips donne une illustration de cette démarche, traitant en particulier le cas d'un *indicateur d'utilité quadratique* par rapport aux variables $q(t)$ et $s(t)$. Sans entrer dans le détail des approximations finies nécessitées par le passage de variations continues à des variations discrètes des variables par rapport au temps, dont l'interprétation n'est d'ailleurs pas évidente ⁽³⁾, remarquons que les fonctions de consommation obtenues par Phlips sont de la forme :

$$q_t = q(\lambda_t P_t, \lambda_{t-1} P_{t-1}, q_{t-1}, \lambda_{t-2} P_{t-2}, q_{t-2}) ,$$

où :

$$\lambda_t = (1 + \kappa - i_{t-1}) \lambda_{t-1} ,$$

définit la suite des λ_t pour une valeur initiale λ_0 donnée.

(1) Cf. [39].

(2) Cela suppose que les variables associées $\psi(t)$ et $\lambda(t)$ satisfont les *conditions de transversalité* :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \exp. (-\kappa t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \exp. (-\kappa t) = 0 .$$

(3) Envisagé à la lumière d'un problème d'agrégation dans le temps (voir p. 27, note 2), ce passage suppose notamment que la plupart des variables du modèle sont constantes sur chaque période t .

Un tel système n'est plus forcément additif ⁽¹⁾. Il ne comporte pas moins de 6 n paramètres à estimer. De plus, d'un point de vue empirique, étant donné la multicollinéarité inhérente aux séries chronologiques se rapportant à la liste des variables prédéterminées qui interviennent dans le système d'équations à estimer, on peut douter a priori de la signification des estimations qu'il est possible d'obtenir ⁽²⁾.

Ainsi, bien qu'elle paraisse attrayante sur le plan de la formulation d'un modèle dynamique tenant compte des plans de consommation future, l'approche proposée par Philips présente sur le plan expérimental des inconvénients qui nous semblent, pour l'instant, insurmontables.

3.2 Formulations de modèles tenant compte de niveaux de consommation désirée

Une autre voie, que nous envisageons d'étudier pour ce problème, consiste à prendre en compte les plans de consommation future introduits sous la forme de niveaux de consommation désirée. Par référence à une situation d'équilibre de longue période ⁽³⁾, on

-
- (1) Philips impose en fait l'additivité au niveau de l'application empirique; par contre, la relation entre λ_t et λ_{t-1} est alors remplacée par :

$$\lambda_t = (1 + \kappa_t - i_{t-1}) \lambda_{t-1} ,$$

ce qui devrait permettre d'estimer, pour chaque période le taux d'escompte subjectif κ_t .

- (2) Voir à ce sujet, page 142, la remarque concernant les expériences effectuées sur la base d'un modèle plus simple (modèle SLDS), du type:

$$q_t = q(\lambda_t p_t, \lambda_{t-1} p_{t-1}, q_{t-1}) .$$

- (3) Voir point 4 ci-après. On montre, en situation de longue période et sous certaines conditions, qu'un modèle dynamique converge vers une situation d'équilibre stationnaire, défini par un système statique de fonctions de consommation.

suppose qu'à l'époque t les *niveaux de consommation désirée* pour les différents biens peuvent être représentés par un système de fonctions de consommation statique, compatible avec le problème d'optimum du consommateur dans le cadre de la théorie des choix ⁽¹⁾.
Désignons alors par :

$$(47) \quad q_t^* = q^* (p_t, r_t) \quad ,$$

ce système de fonctions de consommation, q_t^* étant le vecteur des consommations désirées. Dans ce qui suit, on envisagera également les systèmes suivants qui se déduisent de (47):

$$(48) \quad d_t^* = d^* (p_t, r_t) = \check{p}_t q^* (p_t, r_t) \quad \text{et}$$

$$(49) \quad \omega_t^* = \omega^* (p_t, r_t) = r_t^{-1} d^* (p_t, r_t) \quad ,$$

exprimant respectivement le *niveau des dépenses désirées* d_t^* et le *niveau des coefficients budgétaires désirés* ω_t^* .

Soit également Δq_t le vecteur des différences entre les consommations effectives q_t et les consommations désirées q_t^* . Δq_t est défini par la relation :

$$(50) \quad q_t = q_t^* + \Delta q_t \quad , \quad \text{avec } p_t' \Delta q_t = 0 \quad .$$

De manière équivalente, on aura pour le vecteur des dépenses :

$$(51) \quad d_t = d_t^* + \Delta d_t \quad , \quad \text{avec } \iota' \Delta d_t = 0 \quad ,$$

et pour le vecteur des coefficients budgétaires :

$$(52) \quad \omega_t = \omega_t^* + \Delta \omega_t \quad , \quad \text{avec } \iota' \Delta \omega_t = 0 \quad .$$

(1) On admet ainsi qu'à chaque époque t la cellule de consommation considère l'environnement représenté par les prix p_t et la dépense totale r_t comme l'environnement des périodes ultérieures $\tau > t$.

Les plans de consommation future coïncident alors avec le système de fonctions de consommation statique qui définit l'équilibre stationnaire. (Voir p. 40, note (3).)

Il est bien évident que certaines incertitudes sont inhérentes à un plan de consommation future du type envisagé. Il s'agira par exemple de consommations imprévues, telles que les niveaux q_t^* ne puissent plus être atteints, qui conduiront le plus souvent à une nouvelle allocation de la dépense totale entre les divers biens, et ceci d'autant plus que les activités qui donnent lieu aux *consommations effectives* q_t ne se répartissent pas forcément de manière uniforme tout au long de la période. Dès lors, il convient d'envisager l'existence de *mécanismes d'adaptation* entre les niveaux désirés des consommations, des dépenses ou des coefficients budgétaires, et les niveaux qu'ils atteignent effectivement. Ces mécanismes d'adaptations doivent être fondés sur la mémoire que la cellule de consommation garde du passé ⁽¹⁾, et l'on exigera également qu'ils conservent la propriété d'additivité des fonctions de consommation (47).

S'agissant essentiellement de réallocations de la dépense totale r_t , il est naturel d'envisager en premier lieu des mécanismes d'adaptation quant aux dépenses (51). Deux formulations simples, fondées sur une matrice de *coefficients d'adaptation* R quant au processus de réallocation de la dépense totale, conduisent à poser :

$$\begin{aligned} (53) \quad \Delta d_t &= R \Delta d_t^* , \quad \text{avec} \\ \Delta d_t^* &= d_t^* - d_{t-1} \quad \text{et} \quad {}^tR = 0' ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (54) \quad \Delta d_t &= R \Delta d_{t-1} , \quad \text{avec} \\ \Delta d_{t-1} &= d_{t-1} - d_{t-1}^* \quad \text{et} \quad {}^tR = \rho {}^{t-1}R , \end{aligned}$$

ρ étant un paramètre constant.

On admet ainsi un comportement du consommateur basé sur des modifications de la consommation en valeur.

(1) Il s'agira notamment de tenir compte de phénomènes d'*apprentissage*.

D'après (53), Δd_t est une fonctions linéaire de la différence entre les dépenses désirées d_t^* et les dépenses effectives de la période précédente d_{t-1} , qui résument dans ce cas les comportements passés de la cellule de consommation. Pour $R = D - I$, avec $\iota'D = \iota'$, le système des fonctions de dépense qui se déduit de (51) s'écrit :

$$(55) \quad d_t - d_{t-1} = D [d^* (p_t, r_t) - d_{t-1}] \quad .$$

Il peut être commode, en vue de l'estimation notamment, d'envisager quelques formes particulières quant à la matrice D . Hormis le cas trivial, où $D = I$ et pour lequel $d_t = d^* (p_t, r_t)$, on obtiendra :

$$i) \quad d_t - d_{t-1} = b (r_t - r_{t-1}) \quad , \text{ pour}$$

$$D = b \iota' \quad \text{et} \quad \iota' b = 1 \quad ;$$

$$ii) \quad d_t = d^* (p_t, r_t) + a(r_t - r_{t-1}) \quad , \text{ pour}$$

$$D = I + a \iota' \quad \text{et} \quad \iota' a = 0 \quad .$$

Quant à la spécification (54)⁽¹⁾, elle présente l'avantage d'expliquer un phénomène d'*apprentissage* ⁽²⁾ au niveau des écarts Δd_t entre les dépenses effectives et les dépenses désirées. Par contre, la matrice R ne devient *identifiable* que pour une valeur donnée du paramètre ρ .

Les hypothèses suivantes pour les coefficients budgétaires relèvent d'une démarche similaire :

(1) On reviendra sur l'interprétation de cette spécification lorsque l'on traitera des spécifications économétriques des systèmes de fonctions de consommation envisagés.

(2) Cela suppose que le *rayon spectral* de la matrice R est inférieur à l'unité. Dans ce cas, pour une valeur initiale d_0 donnée :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta d_t = 0 \quad .$$

$$\Delta \omega_t = H \Delta \omega_t^* \quad , \text{ avec}$$

$$\Delta \omega_t^* = \omega_t^* - \omega_{t-1} \quad \text{et} \quad {}^t H = \rho {}^t \quad ;$$

$$\Delta \omega_t = H \Delta \omega_{t-1} \quad , \text{ avec}$$

$$\Delta \omega_t = \omega_{t-1} - \omega_{t-1}^* \quad \text{et} \quad {}^t H = \rho {}^t \quad .$$

Ces deux spécifications, contrairement aux hypothèses du type (53) ou (54) ci-dessus, conservent la propriété d'homogénéité de degré zéro des fonctions de consommation en volume sous-jacentes. Mais, dans les deux cas, la matrice H des coefficients d'adaptation n'est identifiable que si ρ est connu.

S'agissant des consommations en volume, l'additivité implique $p_t' \Delta q_t = 0$, indépendamment de p_t . Si l'on requiert en plus l'homogénéité de degré zéro des fonctions de consommation, on posera par exemple ⁽¹⁾ :

$$(56) \quad \Delta q_t = (\check{p}_t^{-1} B \check{p}_t) \Delta q_t^* \quad , \quad \text{avec}$$

$$\Delta q_t^* = q_t^* - q_{t-1} \quad \text{et} \quad {}^t B = o^t \quad ,$$

qui, pour $B = Q - I$, ${}^t Q = {}^t$, donne lieu aux fonctions de consommation ⁽²⁾ :

$$q_t - q_{t-1} = \check{p}_t^{-1} Q \check{p}_t [q^*(p_t, r_t) - q_{t-1}] \quad .$$

(1) On pourrait évidemment envisager une hypothèse de la forme :

$$\Delta q_t = (\check{p}_t^{-1} C \check{p}_t) \Delta q_{t-1} \quad , \quad {}^t C = \rho {}^t \quad ,$$

qui présente l'inconvénient déjà cité de ne pouvoir identifier C que pour une valeur donnée de ρ .

(2) Les coefficients d'adaptation sont dans ce cas fonction des prix p_t .

Ces relations s'écrivent encore, en terme de fonctions de dépense :

$$(57) \quad d_t - \check{p}_t q_{t-1} = Q [d^*(p_t, r_t) - \check{p}_t q_{t-1}] ,$$

et peuvent être comparées aux fonctions de dépense (55) .

En vue des applications empiriques, on ne retiendra par la suite que les spécifications du type (53), (54) et (56) ci-dessus, qui apparaissent comme étant les plus représentatives. Il va de soi que l'on peut envisager d'autres mécanismes d'adaptation ⁽¹⁾.

4. Situations de longue période et propriétés dynamiques

On envisage généralement en analyse dynamique les problèmes posés par des *situations d'équilibre de longue période*. Il s'agit notamment de considérer l'existence de tels équilibres et leur sensibilité à des variations de variables exogènes. Il s'agira également d'étudier les conditions de l'acheminement d'un système dynamique vers une situation d'équilibre et les conditions de stabilité même de cet équilibre.

4.1 Effets de longue période

A l'époque t , un système dynamique de fonctions de consommation du type retenu peut s'écrire :

$$(58) \quad q_t = g(q_{t-1}, \dots, q_{t-k}, z_t) \quad , \quad k \geq 1 \quad ,$$

où $z'_t = \parallel p'_t \ ; \ r_t \ ; \ x'_t \parallel$, x_t étant un vecteur de variables exogènes retardées ou non. On dira que le système (58) est dans une *situation de longue période* si et seulement si :

(1) Voir par exemple, [51] , pp. 83-85.

$$\forall t \in I_{\ell} = \{\ell, \ell+1, \ell+2, \dots\} \quad , \quad z_t = z \quad .$$

Ainsi, à partir d'une période ℓ donnée, les variables exogènes qui caractérisent l'environnement du système sont constantes.

Par référence à une situation de longue période, un *équilibre* est caractérisé par un niveau de consommation q , tel que en posant dans l'expression (58):

$$q_{t-i} = q \quad , \quad i=0,1,\dots,k \quad ,$$

q est défini par le système d'équations ⁽¹⁾ :

$$(59) \quad q = g(q, z) \quad .$$

Un cas particulier que l'on rencontrera est celui où les relations (59) conduisent à un système de fonctions exprimé sous forme explicite ⁽²⁾ :

$$(60) \quad q = q(p, r, x) \quad ,$$

qui est un système de fonctions de consommation de type statique. On pourra alors, conformément à l'approche statique conventionnelle, analyser l'impact sur les consommations d'équilibre de variations marginales des variables prix et dépense totale, soit encore des variables génériques x . On pourra de même étudier la symétrie des effets prix purs de substitution et de complémentarité, et la compatibilité des fonctions de consommation (60) avec les hypothèses de la théorie des choix.

Lorsque l'on ne peut expliciter q des relations (59) ci-dessus, il est cependant possible d'envisager la mise en évidence des effets de longue période quant aux variables exogènes envisagées. Dans ce but, on établit aisément les relations suivantes :

(1) On admet l'existence d'une solution pour ce système.

(2) Cela suppose en général que les relations [58] expriment q_t comme fonction linéaire des variables endogènes prédéterminées q_{t-i} , $i=1,2,\dots,k$.

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\partial q}{\partial p'} = G^{-1} \frac{\partial g}{\partial p'} , \\ \frac{\partial q}{\partial r} = G^{-1} \frac{\partial g}{\partial r} , \\ \frac{\partial q}{\partial x} = G^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} , \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(62) \quad S = \frac{\partial q}{\partial p'} + \frac{\partial q}{\partial r} q' = G^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial p'} + \frac{\partial g}{\partial r} q' \right) ,$$

où l'on pose :

$$G = I - \frac{\partial g}{\partial q} , \quad (1) .$$

Les relations (62) permettent également d'étudier les conditions pour lesquelles les niveaux d'équilibres q définis par (59) peuvent être envisagés de manière équivalente dans le cadre d'un modèle statique de la théorie des choix.

4.2 Propriétés dynamiques de quelques types de modèles de consommation (2)

On va tout d'abord considérer l'étude du comportement dynamique du système de fonctions de consommation (58) dans une situation de longue période et pour $k = 1$, soit :

$$(63) \quad q_t = g(q_{t-1}, z) , \quad t \in I_{\ell} .$$

Cette relation constitue un système d'équations aux différences du premier ordre, dont la solution, pour une valeur initiale

-
- (1) On suppose que la matrice G est non singulière dans un voisinage de q , ce qui garantit, dans ce voisinage, l'unicité de la solution du système (59).
 - (2) En ce qui concerne les notions générales utilisées dans ce paragraphe, on pourra par exemple consulter [16], [27], chapitre 12, et [30], chapitre 5. Voir également les références données par ces auteurs.

$q^0 = q_{\ell-1}$ donnée, sera désignée par $\bar{q}_t$, $t \in I_\ell$. Dès lors, le problème de la *stabilité* consiste à étudier sous quelles conditions :

$$(64) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{q}_t - q) = 0 ,$$

où q est un niveau d'équilibre de longue période défini par les relations (59).

On distingue le concept de *stabilité globale*, lorsque (64) a lieu quelles que soient les valeurs initiales $q^0 \geq 0$ du système (63), du concept de *stabilité locale*, si (64) n'est vérifié que pour des valeurs initiales q^0 situées dans un voisinage du point d'équilibre suffisamment petit.

Quant aux critères relatifs à l'analyse de la stabilité, on peut mettre en évidence une première méthode dite de *Liapunov* (ou *méthode indirecte*) qui suppose la résolution du système (63) et ne s'applique en général qu'à des systèmes d'équations aux différences linéaires.

Soit alors le cas particulier du système (63):

$$(65) \quad q_t = C q_{t-1} + h \quad , \quad t \in I_\ell ,$$

où l'on a posé $C = C(z)$ et $h = h(z)$ ⁽¹⁾.

Une *solution particulière* de ce système correspond évidemment à l'équilibre de longue période :

$$q = (I - C)^{-1} h \quad ,$$

tandis que pour une valeur initiale $q^0 = q_{\ell-1}$ donnée, la *solution générale* peut s'écrire :

(1) La matrice C et le vecteur h sont fonction de z , car, par additivité $p'q_t = r$, $\forall t \in I_\ell$. En général, dans les applications, on aura :

$$p'C = 0' \quad \text{et} \quad p'h = r \quad .$$

$$(66) \quad \overset{\vee}{q}_t = C^{t-\ell+1} (q^0 - q) + q, \quad t \in I_\ell.$$

Dans ce cas, on sait que la condition nécessaire et suffisante de stabilité globale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overset{\vee}{q}_t = q,$$

indépendamment du vecteur q^0 donné, est que le rayon spectral de la matrice C soit inférieur à l'unité, ce qui assure également l'existence de la matrice inverse $(I - C)^{-1}$. Par ailleurs, pour

$$p'C = o' \quad \text{et} \quad p'h = r,$$

relations qui traduisent l'additivité des fonctions de consommation (65), on vérifie aisément que l'on a :

$$p'q = p' (I - C)^{-1} h = r,$$

d'où l'additivité de la solution (66) :

$$p' \overset{\vee}{q}_t = r, \quad t \in I_\ell.$$

On remarquera encore que les expressions (65) et (66) ont leur équivalent en terme de fonctions de dépense :

$$(67) \quad d_t = (\overset{\vee}{p} C \overset{\vee}{p}^{-1}) d_{t-1} + \overset{\vee}{p} h, \quad t \in I_\ell, \quad \text{et}$$

$$(68) \quad \overset{\vee}{d}_t = (\overset{\vee}{p} C \overset{\vee}{p}^{-1})^{t-\ell+1} (d^0 - d) + d, \quad t \in I_\ell,$$

avec : $d_t = \overset{\vee}{p} q_t$, $\overset{\vee}{d}_t = \overset{\vee}{p} \overset{\vee}{q}_t$, $d^0 = \overset{\vee}{p} q^0$ et

$$d = \overset{\vee}{p} q = (I - \overset{\vee}{p} C \overset{\vee}{p}^{-1})^{-1} \overset{\vee}{p} h.$$

De même, en divisant les expressions (67) et (68) par la dépense totale r , on obtiendra des relations analogues au niveau des coefficients budgétaires $\omega_t = r^{-1} d_t$.

Ainsi, dans les conditions définies ci-dessus, il est équivalent d'envisager l'analyse dynamique d'un modèle de consommation du type retenu, au niveau des consommations en volume, au niveau des dépenses ou au niveau des coefficients budgétaires.

Dans le cas où, d'après l'expression (63), q_t n'est pas une fonction linéaire de q_{t-1} , on peut envisager une approximation linéaire au point d'équilibre q donné par les relations (59). On montre, sous certaines conditions de régularité, que si le système :

$$q_t - q = \left[\frac{\partial g}{\partial q_{t-1}} \right]_{q_{t-1}=q} (q_{t-1} - q) \quad ,$$

est stable ⁽¹⁾, alors le système (63) est *localement stable*.

Un critère plus général quant à la stabilité globale, qui s'applique dans le cas de systèmes du type (63) non-linéaires par rapport à q_{t-1} , est connu sous le nom de *seconde méthode de Liapunov* (ou *méthode directe*). Il repose sur l'existence d'une fonction scalaire $v_t = v(q_t - q)$, continue telle que :

- i) $\forall q_t \neq q \quad v_t > 0 \wedge v_t = 0 \Leftrightarrow q_t = q$
- ii) $v_t \rightarrow +\infty \quad \text{pour} \quad |q_t - q| \rightarrow \infty$ ⁽²⁾ .
- iii) $v_t - v_{t-1} < 0 \wedge v_t = v_{t-1} \Rightarrow q_t = q$.

S'il existe une fonction v qui satisfait aux conditions i), ii) et iii), alors la position d'équilibre donnée par q est globalement stable. On choisira en général, dans les applications, une fonction v qui possède les propriétés de la distance ⁽³⁾, ce qui réduit le

(1) Cela suppose que le rayon spectral de la matrice $\left[\frac{\partial g}{\partial q_{t-1}} \right]_{q_{t-1}=q}$ est inférieur à l'unité.

La matrice $G = I - \left[\frac{\partial g}{\partial q_{t-1}} \right]_{q_{t-1}=q}$ est alors non-singulière. Voir

également la note (1) de la page 47 .

(2) $|q_t - q|$ désigne la norme du vecteur $q_t - q$.

(3) Distance euclidienne par exemple.

problème de la stabilité globale à la vérification de la condition iii) ci-dessus.

Toujours dans une situation de longue période, on traitera le cas d'un système de fonctions de consommation du type (58), où k est fini mais supérieur à un, en se ramenant, par des changements de variables, à un système d'équations aux différences du premier ordre ⁽¹⁾.

Dépassant le cadre de situations de longue période, qui se fondent sur une notion d'*équilibre stationnaire*, on peut envisager de se donner des évolutions dans le temps des variables exogènes z_t , et étudier le comportement du système par rapport à la *trajectoire d'équilibre* correspondante. A titre d'illustration, considérons l'exemple suivant.

On admet que les fonctions de consommation en volume du type (58), pour $k = 1$, sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix p_t et à la dépense totale r_t et qu'elles sont linéaires par rapport à q_{t-1} .

Pour les hypothèses :

- i) $\forall t \in I_\ell$, $x_t = x$,
- ii) $\forall t \in I_\ell$, $\exists \lambda_t > 0$; $p_t = \lambda_t p$ et $r_t = \lambda_t r$,

le système des fonctions de consommation s'écrit sous la forme (65) :

$$q_t = C q_{t-1} + h \quad , \quad t \in I_\ell$$

avec $C = C(\pi, x)$ et $h = h(\pi, x)$, où $\pi = r^{-1} p$.

Etant donné les valeurs initiales $q^0 = q_{\ell-1}$, la solution de ce système est donnée par (66) :

(1) Cette procédure est toujours possible dans le cas de systèmes d'équations aux différences linéaires.

$$\begin{aligned} \nabla q_t &= C^{t-\ell+1} (q^0 - q) + q, \quad t \in I_\ell, \\ q &= (I - C)^{-1} h. \end{aligned}$$

Envisageons dès lors le système correspondant pour les fonctions de dépense, dans le cas où :

$$\lambda_t = (1 + v)^{t-\ell+1}, \quad t \in I_\ell,$$

hypothèse selon laquelle tous les prix et la dépense totale évoluent à taux constant v . On obtient :

$$d_t = (1 + v)(\check{p} C \check{p}^{-1}) d_{t-1} + (1 + v)^{t-\ell+1} \check{p} h, \quad t \in I_\ell$$

avec $d_t = \check{p}_t q_t = (1 + v)^{t-\ell+1} \check{p} q_t$ et $d_{\ell-1} = \check{p} q^0$.

On vérifie aisément qu'une solution particulière de ce système est donnée par :

$$d^{(t)} = (1 + v)^{t-\ell+1} (I - \check{p} C \check{p}^{-1})^{-1} \check{p} h, \quad t \in I_\ell, \text{ et}$$

$$d^{(\ell-1)} = d = (I - \check{p} C \check{p}^{-1})^{-1} \check{p} h,$$

alors que, correspondant à une valeur initiale $d^0 = d_{\ell-1}$, la solution générale peut s'écrire :

$$\nabla d^{(t)} = [(1 + v) \check{p} C \check{p}^{-1}]^{t-\ell+1} (d^0 - d) + d^{(t)}, \quad t \in I_\ell.$$

Ainsi, lorsque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\nabla d^{(t)} - d^{(t)}) = 0,$$

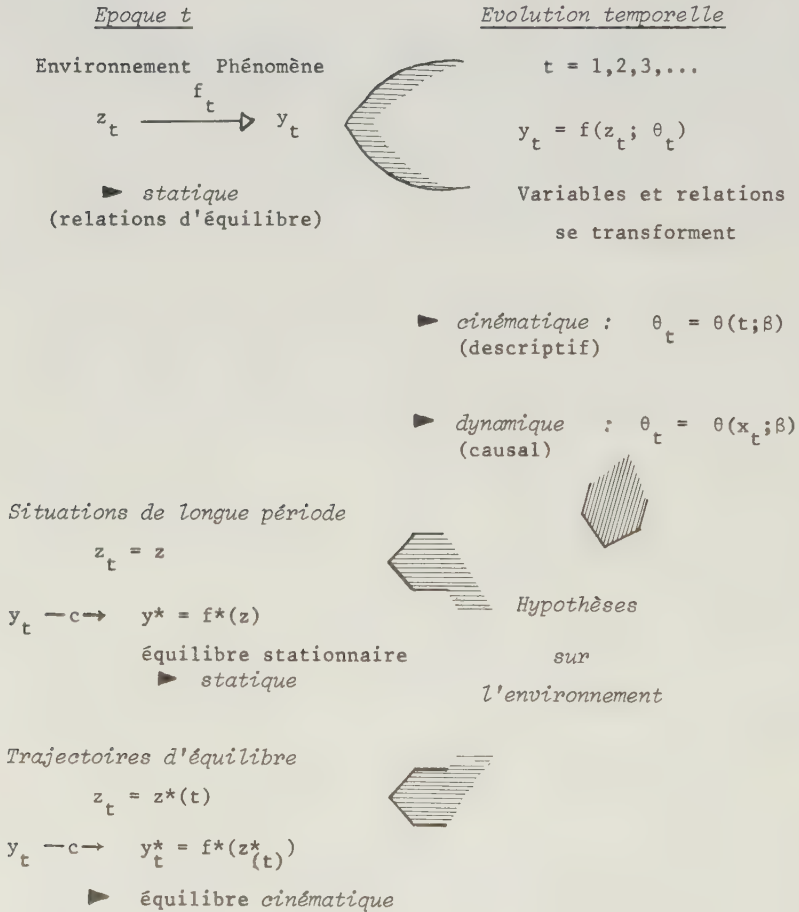
ce qui est vérifié si et seulement si le rayon spectral de la matrice $(1 + v) C$ est inférieur à l'unité, $\nabla d^{(t)}$ tend vers une situation de *croissance équilibrée* donnée par :

$$d^{(t)} = (1 + v) d^{(t-1)}, \quad t \in I_\ell,$$

avec $d^{(\ell-1)} = d$.

Il va de soi que le caractère évident et la simplicité même de cette illustration en limite son intérêt.

Dans le cadre théorique adopté, le schéma suivant résume le rôle conjoint des explications statiques, cinématiques et dynamiques.



Chapitre III APPLICATIONS AU SYSTEME LINEAIRE DE DEPENSES

1. Le système linéaire de dépenses statique

Parmi les modèles de consommation semi-agrégée de type statique, le système linéaire de dépenses (SLD) apparaît actuellement comme une spécification très opératoire et certainement la plus étudiée empiriquement ⁽¹⁾. Il suppose la linéarité des fonctions de dépense $d(p, r) = \sum p q(p, r)$ par rapport aux variables prix et dépense totale :

$$d(p, r) = b r + B p \quad ,$$

ainsi que les hypothèses de la théorie des choix. Par additivité :

$$\iota' b = 1 \quad \text{et} \quad \iota' B = 0' \quad ,$$

alors que les relations de Slutsky (3) seront vérifiées si et seulement si la matrice B est de la forme :

$$B = (I - b \iota') \check{C} \quad ,$$

d'où la spécification des fonctions de consommation en volume :

$$(69) \quad q = c + p^{-1} b (r - p'c) \quad .$$

Par intégration, on obtient aisément un indicateur d'utilité de la classe parétienne associée à ce système :

$$(70) \quad u(q) = \sum_i b_i \log (q_i - c_i) \quad .$$

Dans les premières formulations ⁽²⁾ du système linéaire de dépenses, on interprétait les composantes du vecteur c comme des quantités obligées. On supposait ainsi $c \geq 0$ et, pour un champ de choix tel que $q > c$, on avait également :

$$0 < b < \iota \quad ,$$

(1) Voir par exemple [8], [18], [34], [38], [47] et [58].

(2) Voir par exemple [17], [26], [41], [49].

par non-saturation et concavité stricte de l'indicateur $u(q)$.

L. Solari ⁽¹⁾, remarquant le contenu inutilement restrictif des hypothèses quant aux paramètres c , propose une extension conceptuelle du système linéaire de dépenses. Pour :

$$c_i \geq 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,g \quad ,$$

$$c_i < 0 \quad , \quad i=g+1,\dots,n \quad ,$$

et le champ de choix :

$$Q = \{q/q \geq \max. [c; 0]\} \quad ,$$

L. Solari étudie quant au problème d'optimum du consommateur des solutions de la forme :

$$q_i \geq c_i \quad , \quad i=1,2,\dots,g$$

$$q_i \geq 0 \quad , \quad i=g+1,\dots,n \quad .$$

Cette généralisation permet notamment d'interpréter les paramètres c_i dans l'optique de la *hiérarchie des biens* liée à l'apparition de consommations nouvelles. Plus précisément, on montre que pour une dépense totale r inférieure ou égale au seuil défini par :

$$(71) \quad r > p'c + \max_{c_i < 0} \left\{ \frac{p_i |c_i|}{b_i} \right\} \quad ,$$

certaines parmi les biens à coefficient c_i négatif ne seront pas consommés. En supposant que l'on augmente r depuis son niveau minimum qui assure l'achat des seules quantités $c_i > 0$, on accédera à la consommation des biens dont le coefficient c_i est négatif dans

l'ordre croissant des rapports $\frac{p_i |c_i|}{b_i}$.

(1) Cf. [44] .

Ainsi, les paramètres c_i négatifs explicitent la notion de biens supérieurs hiérarchisés dans l'ordre des rapports $\frac{p_i |c_i|}{b_i}$ et définissent des seuils d'accession à la consommation par rapport au niveau des prix et de la dépense totale. Les coefficients c_i positifs sont évidemment des quantités de consommation obligée, en volume, et se rattachent à la notion de biens de première nécessité, dont la consommation est essentielle. Quant à $r - p'c$, il s'agit de la dépense excédentaire par rapport aux consommations obligées, augmentée d'une dépense fictive correspondant pour les biens supérieurs effectivement consommés, à l'achat de quantités $|c_i|$.

Par la suite, on admettra des situations de prix et de dépense totale vérifiant la relation (71) ci-dessus, telles que tous les biens envisagés soient effectivement consommés. L'interprétation des paramètres b coïncide alors avec la définition des coefficients budgétaires marginaux :

$$(72) \quad \omega^* = p \frac{\partial q}{\partial r} = b \quad ,$$

avec $\sum \omega^* = 1$.

L'analyse des élasticités-dépense totale et des élasticités-prix apparentes et pures complète l'interprétation économique de ce modèle. Dans ce but, étant donné :

- le vecteur des *coefficients budgétaires* :

$$\omega = \|\omega_i\|_{i=1,2,\dots,n} = r^{-1} p q \quad ,$$

- le vecteur des *élasticités-dépense totale* :

$$\epsilon = \|\epsilon_i\|_{i=1,2,\dots,n} = q^{-1} \frac{\partial q}{\partial r} r \quad ,$$

- la matrice des *élasticités-prix apparentes* :

$$H = \|\eta_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n} = q^{-1} \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{p_i}{p} \quad ,$$

- la matrice des élasticités-prix pures :

$$H^* = \|\eta_{ij}^*\|_{i,j=1,2,\dots,n} = \check{q}^{-1} S \check{p} \quad ,$$

on vérifie aisément les relations suivantes :

$$\epsilon = \omega^{-1} b \quad ,$$

$$H = -r^{-1} \check{c} [\omega \check{p} + (r - p'c) I] \quad , \quad \text{et}$$

$$H^* = r^{-1} (r - p'c) \check{c} (\omega b' - I) \quad .$$

Dès lors, pour des valeurs admissibles des paramètres dans le cadre de la théorie des choix, il vient :

- i) $0 < \epsilon_i \leq 1 \Leftrightarrow 0 < b_i \leq \omega_i \quad , \quad \epsilon_i > 1 \Leftrightarrow b_i > \omega_i \quad ;$
- ii) $-1 \leq \eta_{ii} < 0 \Leftrightarrow c_i \geq 0 \quad , \quad \eta_{ii} < -1 \Leftrightarrow c_i < 0 \quad ;$
- iii) $i \neq j, \eta_{ij} \leq 0 \Leftrightarrow c_j \geq 0 \quad , \quad \eta_{ij} > 0 \Leftrightarrow c_j < 0 \quad ;$
- iv) $-1 \leq \eta_{ii}^* < 0 \Leftrightarrow c_i \geq \frac{b_i}{b_i - 1} q_i \quad , \quad \eta_{ii}^* < -1 \Leftrightarrow c_i < \frac{b_i}{b_i - 1} q_i \quad ;$
- v) $i \neq j, \eta_{ij}^* > 0 \quad .$

Les élasticités-dépense totale sont positives ⁽¹⁾. Etant les plus élevées pour les fonctions de consommation supérieures ($c_i < 0$), elles sont décroissantes ⁽²⁾ en fonction des rapports $\frac{p_i c_i}{b_i}$.

Au sens des élasticités-prix apparentes, la demande des biens de première nécessité ($c_i > 0$) est inélastique ($-1 < \eta_{ii} < 0$), celle des biens supérieurs ($c_i < 0$) étant élastique ($\eta_{ii} < -1$). Par ailleurs, tous les biens sont, d'après les effets prix apparents, complémentaires par rapport aux biens de première nécessité et substituables par rapport aux biens supérieurs.

Au sens pur, tous les biens sont substituables.

(1) Cela exclut le paradoxe de Giffen qui veut que $\eta_{ii} > 0$.

(2) On vérifie en effet que les élasticités-dépense totale se mettent sous la forme :

$$\epsilon_i = \left[1 + \frac{p_i c_i}{r b_i} - \frac{p'c}{r} \right]^{-1} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad .$$

2. Extensions cinématiques et formulations dans l'optique des habitudes de consommation

Dans les formulations cinématiques et dynamiques que nous envisagerons ici, le système linéaire de dépenses peut s'écrire, à l'époque t :

$$(73) \quad q_t = c_t + p_t^{-1} b_t (r_t - p_t' c_t) \quad ,$$

avec, par additivité, $p_t' b_t = 1$.

Pourvu que b_t et c_t ne dépendent pas des variables exogènes p_t et r_t , et pour le champ de choix défini par :

$$q_t > \max. \{c_t; 0\} \quad ,$$

les fonctions de consommation (73) du type SLD sont solution du problème d'optimum (40) , où l'on pose :

$$u(q_t - c_t) = \sum_i b_{it} \log (q_{it} - c_{it}) \quad ,$$

avec, par concavité stricte : $0 < b_t < 1$.

Dans ce cas, les résultats propres au système linéaire de dépenses statique dans le cadre de la théorie des choix sont conservés. On pourra de même, en considérant le champ de choix $\{q_t/q_t \geq \max. [c_t; 0]\}$, transposer la généralisation conceptuelle proposée par L. Solari, les fonctions de consommation supérieures, telles que $c_{it} < 0$, étant alors hiérarchisées à l'époque t dans l'ordre des rapports $\frac{p_{it}|c_{it}|}{b_{it}}$.

Considérons tout d'abord l'effet sur ces fonctions de consommation d'une variation marginale des variables c_t . D'après les relations (21), il vient :

$$(74) \quad \mathcal{E}(q_t/c'_t) = - H_t^* \mathcal{E}(\frac{\partial u}{\partial q_t}/c'_t) \quad ,$$

avec :

$$H_t^* = -r_t^{-1}(r_t - p'_t c_t) \check{w}_t^{-1} \check{b}_t (I - \check{v}_t b'_t) \quad \text{et}$$

$$\mathcal{E}(\frac{\partial u}{\partial q_t}/c'_t) = (r_t - p'_t c_t)^{-1} \check{w}_t^{-1} \check{b}_t \check{p}_t \check{c}_t \quad ,$$

soit encore :

$$\mathcal{E}(q_t/c'_t) = \check{q}_t^{-1} (I - \check{p}_t^{-1} b_t p'_t) \check{c}_t \quad .$$

Les relations (74) ci-dessus s'interprètent simplement. Rappelons que pour un tel système de fonctions de consommation dans le cadre de la théorie des choix, les éléments diagonaux de la matrice H_t^* sont négatifs, les éléments non-diagonaux étant positifs ⁽¹⁾. Dès lors, l'utilité marginale d'un bien de première nécessité ($c_{it} > 0$), s'accroît avec la consommation obligée à laquelle il donne lieu, ce qui se traduit par les effets suivants au niveau de la consommation des divers biens :

$$\mathcal{E}(q_{it}/c_{it}) > 0 \quad , \quad \mathcal{E}(q_{jt}/c_{it}) < 0 \quad , \quad i \neq j=1,2,\dots,n \quad .$$

Inversement pour les fonctions de consommation supérieures ($c_{it} < 0$), une variation marginale de la variable c_{it} est telle que :

$$\mathcal{E}(\frac{\partial u}{\partial q_{it}} / c_{it}) < 0 \quad \text{et}$$

$$\mathcal{E}(q_{it}/c_{it}) < 0 \quad , \quad \mathcal{E}(q_{jt}/c_{it}) > 0 \quad i \neq j=1,2,\dots,n \quad .$$

Il reste à envisager l'effet sur les fonctions de consommation (73) de modifications de structure dues aux coefficients budgétaires marginaux b_t . On a :

(1) Voir page 57 ci-dessus.

$$(75) \quad \mathcal{E}(q_t/b'_t) = r_t^{-1} (r_t - p'_t c_t) \omega_t^{-1} v_t^v b_t \geq 0 \quad , \quad ,$$

et si l'on tient compte de la contrainte $v'_t b_t = 1$,

en posant $b_t = (v'_t b_t^*)^{-1} b_t^*$, on obtient :

$$\mathcal{E}(q_t/b_t^*) = \mathcal{E}(q_t/b'_t) \cdot \mathcal{E}(b_t/b_t^*) \quad ,$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{E}(b_t/b_t^*) = I - v'_t b_t^* \quad ,$$

d'où :

$$\mathcal{E}(q_{it}/b_{it}^*) > 0 \wedge \mathcal{E}(q_{jt}/b_{it}^*) < 0 \quad , \quad i \neq j = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

relations dont l'interprétation est évidente.

Quant à b_t et c_t , on retiendra le plus souvent des hypothèses de la forme (1) :

$$(76) \quad \begin{cases} b_t = b^0 + b^1 \delta_t \quad , \quad v'_t b^0 = 1 \quad \text{et} \quad v'_t b^1 = 0 \quad , \\ c_t = c^0 + c^1 v_t \quad , \end{cases}$$

où b^0 , b^1 , c^0 et c^1 sont des vecteurs de paramètres, δ_t est une fonction scalaire et v_t un vecteur de fonctions, v_t et δ_t étant à spécifier en fonction de variables prédéterminées.

Les formulations cinématiques les plus immédiates s'obtiennent en posant :

$$\begin{aligned} \delta_t &= t - t_0 \quad , \\ v_t &= v(t - t_0) \quad , \end{aligned}$$

(1) Pour le système SLD, des applications empiriques de ce type de formulations ont été envisagées, notamment dans [11], [34], [38] et [50], chapitre XIV.

t_0 étant une date de référence. Comme on l'a vu, elles permettent d'éclairer l'évolution dans le temps de la structure du modèle statique sous-jacent, caractérisée par les paramètres b et c .

S'agissant de prendre en compte l'influence du passé et de mettre en évidence des effets de formation d'habitudes, on se propose d'étudier la spécification particulière suivante, que l'on notera :

$$\text{SLD } \{b_t = b^0 ; c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}\} ,$$

pour laquelle $\delta_t = 0$ et $v_t = q_{t-1}$. Les fonctions de consommation (73) s'écrivent alors :

$$(77) \quad q_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1} + \check{p}_t^{-1} b^0 [r_t - p_t' (c^0 + \check{c}^1 q_{t-1})] ,$$

avec, par concavité stricte $0 < b^0 < 1$.

L'analyse des effets de substituabilité et de complémentarité dans le temps résulte des relations suivantes :

$$\xi(q_t/q'_{t-1}) = \xi(q_t/c_t') \cdot \xi(c_t/q'_{t-1}) ,$$

où

$$\xi(c_t/q'_{t-1}) = \check{c}_t^{-1} \check{c}^1 \check{q}_{t-1} ,$$

c'est-à-dire :

$$\xi(q_t/q'_{t-1}) = \check{q}_t^{-1} (I - \check{p}_t^{-1} b^0 p_t') \check{c}^1 \check{q}_{t-1} ,$$

avec

$$\omega_t' \xi(q_t/q'_{t-1}) = 0' .$$

Ainsi :

$$c_i^1 > 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}(q_{it}/q_{it-1}) > 0 \wedge \mathcal{E}(q_{jt}/q_{it-1}) < 0 \quad i \neq j=1,2,\dots,n, \text{ et}$$

$$c_i^1 < 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}(q_{it}/q_{it-1}) < 0 \wedge \mathcal{E}(q_{jt}/q_{it-1}) > 0 \quad i \neq j=1,2,\dots,n.$$

Les biens pour lesquels on observe des effets de formation d'habitudes ($c_i^1 > 0$) sont substituables dans le temps par rapport à tous les autres biens, tandis que les biens à coefficient $c_i^1 < 0$ (effacement d'habitudes de consommation) sont complémentaires dans le temps par rapport aux autres biens.

Tel qu'on l'a défini, l'équilibre de longue période résulte du vecteur de consommations q solution du système d'équations :

$$q = c^0 + \check{c}^1 q + \check{p}^{-1} b^0 [r - p' (c^0 + \check{c}^1 q)] .$$

Ce système est linéaire par rapport à q :

$$A q = c^0 + \check{p}^{-1} b^0 (r - p' c^0) ,$$

$$\text{avec} \quad A = \check{p}^{-1} [I - (I - b^0 \check{c}') \check{c}^1] \check{p} .$$

Comme :

$$A^{-1} = \check{p}^{-1} [I - (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0 \check{c}^1]^{-1} \check{\xi} \check{p} ,$$

$$\text{où} \quad \check{\xi} = (I - \check{c}')^{-1} ,$$

on obtient, après simplification ⁽¹⁾ :

$$[78] \quad q = \check{\xi} c^0 + \check{p}^{-1} (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0 (r - p' \check{\xi} c^0) .$$

(1) On tient compte du fait que :

$$\check{\xi} = I + \check{c}^1 \check{\xi} \quad \text{et} \quad A^{-1} \check{p}^{-1} b^0 = \check{p}^{-1} (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0 .$$

En posant :

$$(79) \quad c = \underset{\xi}{\vee} c^0 \quad \text{et} \quad b = (\xi' b^0)^{-1} \underset{\xi}{\vee} b^0 ,$$

on retrouve, traduisant une situation d'équilibre de longue période, le système linéaire de dépenses statique (69) associé à l'indicateur d'utilité (70). Dès lors, étant donné les relations (79), on pourra poursuivre l'analyse de cet équilibre de longue période en s'inspirant des résultats du modèle statique.

Quant au problème de sa stabilité, en écrivant le système de fonctions de consommation (77) dans une situation de longue période :

$$q_t = \underset{p}{\vee}^{-1} (I - b^0 \underset{t}{\vee}') \underset{c}{\vee}^1 \underset{p}{\vee} q_{t-1} + c^0 + \underset{p}{\vee}^{-1} b^0 (r - p' c^0) ,$$

on est conduit à étudier le rayon spectral de la matrice $(I - b^0 \underset{t}{\vee}') \underset{c}{\vee}^1$ (1).

Un cas particulier, que l'on déduit des fonctions de consommation (77) en posant $c^0 = 0$, conduit à la spécification SLD $\{b_t = b^0, c_t = \underset{c}{\vee}^1 q_{t-1}\}$:

$$(80) \quad q_t = \underset{c}{\vee}^1 q_{t-1} + \underset{p}{\vee}^{-1} b^0 (r_t - p'_t \underset{c}{\vee}^1 q_{t-1}) ,$$

qui présente l'avantage, en vue de l'estimation, de n'avoir qu'un nombre relativement restreint de paramètres $(2n-1)$, tout en tenant compte de l'influence du passé. Par contre, on ne pourra pas considérer cette spécification comme une généralisation du système linéaire de dépense statique. Pour $\underset{c}{\vee}^1 = 0$, on obtient un système de lois de demande à élasticités constantes dans le cadre de la théorie des choix. C'est d'ailleurs un système de même forme que les fonctions de consommation (80) admettent comme solution de l'équilibre

(1) Voir à ce sujet l'annexe au présent chapitre, pp. 84-86.

de longue période :

$$(81) \quad q = p^{-1} (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0 r ,$$

$$\text{avec} \quad \check{\xi} = (I - \check{c}^1)^{-1} .$$

3. Application au système linéaire de dépenses d'une version discrète de l'approche dynamique de Houthakker et Taylor

Les spécifications présentées ci-dessus supposent que l'état hérité du passé est résumé de manière exhaustive par la seule variable endogène retardée q_{t-1} . On peut alors se demander s'il n'est pas judicieux d'admettre une mémoire remontant plus avant dans le passé. Cependant, l'introduction de variables endogènes retardées sous la forme :

$$c_t = c^* + \sum_{\tau} \check{c}^{(\tau)} q_{t-\tau-1} \quad (1) ,$$

limiterait singulièrement la portée expérimentale des modèles correspondants, eu égard au nombre de paramètres à estimer. Dans ce sens, une hypothèse du type :

$$\check{c}^{(\tau)} = \check{k} (\check{\gamma})^{\tau} , \quad \tau=0,1,2,\dots ,$$

permet de s'affranchir, tout au moins partiellement, de cet inconvénient et traduit, pour $|\gamma_i| < 1$, $i=1,2,\dots,n$, l'idée d'une mémoire qui s'estompe avec le temps. Comme on l'a déjà souligné, il est équivalent de poser :

$$\begin{aligned} c_t &= c^* + \check{k}^* s_{t-1} , \\ s_{t-1} &= \check{\alpha} q_{t-1} + \check{\gamma} s_{t-2} , \end{aligned}$$

(1) $\check{c}^{(\tau)}$ désigne la matrice diagonale dont les éléments non-nuls sont ceux du vecteur de paramètres $c^{(\tau)} = \|c_i^{(\tau)}\|$, $i=1,2,\dots,n$.

avec $k = \check{\alpha} k^*$. On retrouve ainsi une formulation discrète de l'approche proposée par Houthakker et Taylor dans laquelle les variables s_{t-1} , représentatives de stocks de biens durables ou d'habitudes de consommation, interviennent sous forme linéaire au niveau des c_t . Toutefois, il importe de rappeler que les paramètres α et k^* ne sont pas identifiables, seul leur produit $k = \check{\alpha} k^*$ l'étant.

Une présentation différente, qui s'inspire des premiers travaux sur le système linéaire de dépenses statique, se fonde sur un système de fonctions de dépense linéaire :

$$d_t = b^0 r_t + B p_t + A \check{p}_t s_{t-1} ,$$

avec, par additivité :

$${}_t' b^0 = 1 , \quad {}_t' B = 0' \quad \text{et} \quad {}_t' A = 0' .$$

On montre ⁽¹⁾ que ce système de fonctions est compatible avec les hypothèses de la théorie des choix si et seulement si les matrices A et B sont de la forme :

$$B = (I - b^0 {}_t') \check{c}^* \quad \text{et} \quad A = (I - b^0 {}_t') \check{k}^* \quad (2) .$$

Quant à la procédure d'élimination des variables non mesurables s_{t-1} , considérons, pour l'indicateur d'utilité :

$$u(q_t; s_{t-1}) = \sum_i b_i^0 \log (q_{it} - c_i^* - k_i^* s_{it-1}) ,$$

-
- (1) Cette démonstration, proposée par P. Balestra, est donnée en annexe dans [36]. Elle est du même type que celle faite par Klein et Rubin [26] pour le système linéaire de dépenses statique.
- (2) Ce résultat peut être établi directement si l'on considère que pour le système SLD conventionnel, les dépenses sont linéaires par rapport à $\check{p}_t c_t$. Dès lors, en remplaçant c_t par $c^* + \check{k}^* s_{t-1}$, on obtient le résultat ci-dessus.

les conditions d'optimum (18) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial q_t} = \lambda_t p_t & , \\ p'_t q_t = r_t & , \end{cases}$$

soit :

$$q_t = c^* + \check{k}^* s_{t-1} + \check{p}_t^{-1} b^0 \mu_t ,$$

où $\mu_t = \frac{1}{\lambda_t}$ est défini par la contrainte d'additivité :

$$\mu_t = r_t - p'_t (c^* + \check{k}^* s_{t-1}) .$$

La relation (37) qui définit s_{t-1} peut s'écrire :

$$s_{t-1} - \check{\gamma} s_{t-2} = \check{\alpha} q_{t-1} ,$$

d'où :

$$q_t - \check{\gamma} q_{t-1} = (I - \check{\gamma}) c^* + \check{k}^* \check{\alpha} q_{t-1} + \check{p}_t^{-1} b^0 \mu_t - \check{p}_{t-1}^{-1} \check{\gamma} b^0 \mu_{t-1} .$$

Pour :

$$\begin{aligned} c^0 &= (I - \check{\gamma}) c^* , \\ \check{c}^1 &= \check{\gamma} + \check{k}^* \check{\alpha} = \check{\gamma} + \check{k} \quad \text{et} \\ b^1 &= -\check{\gamma} b^0 , \end{aligned}$$

on obtient le système linéaire de dépenses avec stocks (SLDS) écrit pour T-1 périodes :

$$(82) \quad q_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1} + \check{p}_t^{-1} b^0 \mu_t + \check{p}_{t-1}^{-1} b^1 \mu_{t-1} ,$$

$$p'_t q_t = r_t \quad , \quad t=2,3,\dots,T ,$$

μ_t, μ_{t-1} étant définis par additivité pour des valeurs initiales q_1, p_1 et μ_1 fixées.

Il faut remarquer que les paramètres b^0 gardent l'interprétation de coefficients budgétaires marginaux, tels que $\iota' b^0 = 1$. Au niveau de l'indicateur d'utilité, cela revient à choisir un indicateur parmi deux de la classe parétienne envisagée. Dès lors $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1}$ ne peut être fixé arbitrairement, mais on doit le considérer comme un paramètre positif.

Etant donné que :

$$c_t = c^* + \sum_{\tau=0}^{\infty} (\check{\gamma})^{\tau} \check{k} q_{t-\tau-1} ,$$

on a la relation de récurrence qui définit les variables c_t

$$(83) \quad c_t = \check{\gamma} c_{t-1} + \check{k} q_{t-1} + c^0, \quad t=2,3,\dots,T,$$

avec :

$$c_1 = q_1 - p_1^{-1} b^0 \mu_1 ,$$

ce qui permet de calculer ⁽¹⁾ les diverses élasticités-prix, apparentes et pures, et les élasticités dépense-totale.

Comme on l'a vu ⁽²⁾, les matrices diagonales :

$$C_t^{(\tau+1)} = \check{k} (\check{\gamma})^{\tau} , \quad \tau=0,1,\dots,$$

explicitent à l'époque t les effets d'habitudes d'après leur ordre temporel, tandis que les matrices

$$\mathcal{L}(q_t/q'_{t-(\tau+1)}) = r_t^{-1} \omega_t^{-1} (I - b^0 \iota') \check{p}_t \check{k} (\check{\gamma})^{\tau} \check{q}_{t-(\tau+1)} ,$$

définissent, pour $\tau=0,1,\dots$ la suite des complémentarités et des substituabilités dans le temps.

(1) En raison du caractère non identifiable des paramètres α , on ne peut pas, dans ce calcul, utiliser directement les relations [37] qui définissent les variables s_{t-1} .

(2) Voir page 36.

Afin d'étudier les fonctions de consommation du type SLDS dans une situation de longue période, on écrit le modèle sous la forme :

$$(84) \quad \begin{cases} q_t = p^{-1} (I - b^0 \iota') \check{p} c_t + p^{-1} b^0 r \\ c_t = \check{\gamma} c_{t-1} + \check{k} q_{t-1} + c^0 \end{cases},$$

soit encore :

$$y_t = B y_{t-1} + h, \quad t \in I_\ell,$$

où l'on a posé :

$$y_t = \begin{pmatrix} q_t \\ c_t \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} p^{-1} (I - b^0 \iota') \check{p} c^0 + p^{-1} b^0 r \\ c^0 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$B = \begin{pmatrix} p^{-1} (I - b^0 \iota') \check{p} \check{k} & p^{-1} (I - b^0 \iota') \check{p} \check{\gamma} \\ \check{k} & \check{\gamma} \end{pmatrix}$$

L'équilibre de longue période est donné par :

$$y = (I - B)^{-1} h.$$

Après simplification, on obtient :

$$(85) \quad q = p^{-1} (I - b^0 \iota') \check{p} c + p^{-1} b^0 r,$$

et

$$(86) \quad c = p^{-1} \check{\zeta} A^{-1} \check{p} [\check{k}^{-1} c^0 + p^{-1} b^0 r],$$

où $\check{\zeta} = (I - \check{\gamma})^{-1} \check{k}$,

$$A^{-1} = [I - (I - b^0 \check{\zeta}') \check{\zeta}]^{-1} = (I - b \check{\zeta}') \check{\zeta} ,$$

avec $\check{\xi} = (I - \check{\zeta})^{-1}$ et
 $b = (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0$.

L'équilibre de longue période c pour les variables c_t est associé, dans l'expression (85), aux coefficients budgétaires marginaux b^0 . Comme c est fonction des variables d'équilibre prix p et dépense totale r , il convient d'étudier les fonctions de consommation d'équilibre de longue période que l'on obtient en substituant dans (85) c par son expression (86). On vérifie que l'on a :

$$(87) \quad q = \bar{c} + \check{p}^{-1} b (r - p' \bar{c}) ,$$

avec $b = (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0$ et

$$\bar{c} = \check{\xi} (I - \check{\gamma})^{-1} c^0 = [I - (\check{\gamma} + \check{k})]^{-1} c^0 .$$

Ainsi, le système de fonctions de consommation SLDS admet également comme équilibre de longue période le système linéaire de dépenses statique ⁽¹⁾. Rappelons que cet équilibre est (globalement) stable si et seulement si le rayon spectral de la matrice B est inférieur à 1'unité.

4. Introduction d'un système de prix normaux

La formulation dynamique que l'on va présenter généralise également le système SLD statique. Tout en tenant compte de l'influence du passé d'après les concepts introduits, on admet l'existence d'un vecteur de *prix normaux*, noté $\bar{p}_t$, sur lesquels se fonde le consommateur dans la détermination de ses consommations.

(1) Toutefois, le vecteur de paramètre $\bar{c}$, rattachés aux coefficients budgétaires marginaux b , diffère du niveau d'équilibre c des variables c_t , qui est associé aux coefficients budgétaires marginaux b^0 .

Par l'introduction d'un système de prix normaux différent du système des *prix effectifs* p_t , on se propose notamment de mettre en évidence les réactions que peut avoir la cellule de consommation confrontée au niveau des prix effectifs. En particulier, il apparaît opportun d'étudier l'effet d'une connaissance approximative du système des prix dans le cadre d'un comportement d'optimum de la théorie des choix.

Il va de soi que la définition même d'un système de prix normaux est a priori arbitraire, et l'on s'inspirera principalement à cet égard d'un souci de simplicité.

C'est ainsi que l'on suppose un *mécanisme d'adaptation*, des prix normaux par rapport aux prix effectifs, défini par les relations :

$$\frac{\bar{p}_{it} - p_{it}}{\bar{p}_{it}} = \gamma_i (1 - \Pi(t/t-1)), \quad i=1,2,\dots,n, \quad ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$(88) \quad \check{p}_t^{-1} \check{p}_t = [I - \check{\gamma} [1 - \Pi(t/t-1)]] \quad .$$

On retiendra pour $\Pi(t/t-1)$ un nombre indice positif qui représente la variation moyenne des prix à la consommation entre les périodes $t-1$ et t .

Quant à l'interprétation des coefficients γ_i , on a :

i) pour $0 < \Pi(t/t-1) < 1$

$$\bar{p}_{it} > p_{it} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i > 0 \quad ,$$

$$\bar{p}_{it} < p_{it} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i < 0 \quad ;$$

ii) pour $\Pi(t/t-1) > 1$

$$\bar{p}_{it} \geq p_{it} \Leftrightarrow \gamma_i \leq 0 \quad ,$$

$$\bar{p}_{it} < p_{it} \Leftrightarrow \gamma_i > 0 \quad .$$

Un bien à coefficient γ_i positif est caractérisé par un prix normal supérieur au prix effectif en cas de baisse générale des prix ($0 < \Pi(t/t-1) < 1$), tandis que le prix normal est inférieur au prix effectif en cas de hausse générale des prix ($\Pi(t/t-1) > 1$). Inversement, à un bien tel que $\gamma_i < 0$ est rattaché un prix normal inférieur au prix effectif en cas de baisse générale des prix, alors qu'une hausse générale des prix donne lieu à un prix normal supérieur au prix effectif. Pour $\gamma = 0$ ou $\Pi(t/t-1) = 1$, les prix normaux sont égaux aux prix effectifs. Ainsi, comparés aux biens à coefficient γ_i positifs, les biens à coefficients γ_i négatifs suggèrent une notion de biens durables, dont les plans de consommation dépassent le cadre de la période retenue. En particulier, lorsque tous les prix augmentent, (situation d'inflation par exemple), les prix des biens tels que $\gamma_i < 0$ donnent lieu à des "anticipations" à la hausse ⁽¹⁾ de la part de la cellule de consommation, tandis que pour les biens à $\gamma_i > 0$, les prix normaux restent inférieurs aux prix effectifs.

Désignons par $\bar{q}_t$ le vecteur des *consommations normales* adaptées aux prix normaux $\bar{p}_t$ et à la dépense totale r_t ; $\bar{q}_t$ résulte du comportement d'optimum du consommateur que traduisent les conditions ⁽²⁾ :

$$(89) \quad \left. \begin{array}{l} \max_{\bar{q}_t} u(\bar{q}_t - c_t) \\ \bar{p}_t' \bar{q}_t = r_t \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max_{\bar{e}_t} u(\bar{e}_t) \\ \bar{p}_t' \bar{e}_t = \bar{y}_t \end{array} \right. ,$$

(1) Les prix normaux correspondants (qui entrent dans le calcul d'optimum) sont alors supérieurs aux prix effectifs.

(2) Le changement de variable défini par $\bar{e}_t = \bar{q}_t - c_t$ et déjà explicité

au chapitre II, pp. 31-34, est utilisé ici afin d'alléger quelque peu les notations.

avec $\bar{e}_t = \bar{q}_t - c_t$ et $\bar{y}_t = r_t - \bar{p}'_t c_t$, les variables $c_t = c(q_{t-1}, \dots, q_{t-k}, x_t)$ tenant compte de l'état hérité du passé.

Pour un indicateur d'utilité u quasi-concave au sens strict et un champ de choix tel que :

$$\forall t, \bar{q}_t > \max. \{c_t; 0\} ,$$

les fonctions de consommation normale s'écrivent :

$$(90) \quad \bar{q}_t = c_t + \bar{e}(\bar{p}_t, \bar{y}_t) ,$$

$$\text{avec} \quad \bar{e}_t = \bar{e}(\bar{p}_t, \bar{y}_t) > 0 .$$

Ces fonctions représentent les quantités qui seraient effectivement consommées si les prix normaux étaient égaux aux prix effectifs et, en vertu de (89), elles satisfont aux propriétés habituelles d'un système de fonctions de consommation dans le cadre de la théorie des choix.

Les prix normaux étant différents des prix effectifs, il s'en suit une dépense résiduelle, positive ou négative.

Soit alors Δy_t la *dépense résiduelle* due aux variables c_t :

$$\Delta y_t = (\bar{p}_t - p_t)' c_t ,$$

qui s'écrit également :

$$\Delta y_t = y_t - \bar{y}_t ,$$

$$\text{où} \quad y_t = r_t - p'_t c_t .$$

Une hypothèse raisonnable quant à l'affectation de cette dépense résiduelle conduit à poser :

$$(91) \quad \Delta e_t = \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{y}_t} \Delta y_t, \quad ,$$

avec :

$$\bar{p}'_t \Delta e_t = \bar{p}'_t \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{y}_t} \Delta y_t = \Delta y_t \quad .$$

Ainsi, les *quantités résiduelles* Δe_t résultent de l'effet revenu provoqué par la variation Δy_t de $\bar{y}_t$.

Compte tenu des relations (88), (90) et (91) ci-dessus, on va maintenant établir que les fonctions de consommation effective peuvent se mettre sous la forme :

$$(92) \quad q_t = c_t + \bar{p}_t^{-1} (b^0 + b^1 \Pi(t/t-1)) [r_t - p'_t c_t] \quad ,$$

$$p'_t q_t = r_t \quad ,$$

si et seulement si :

$$p'_t \bar{e}_t = \bar{p}'_t \bar{e}_t \quad (1) \quad ,$$

relation qui traduit l'hypothèse d'absence de dépense résiduelle au niveau des fonctions :

$$\bar{e}_t = \bar{e}(\bar{p}_t, \bar{y}_t) \quad .$$

En effet, comme d'après (88) :

$$p_t = \left[I - [1 - \Pi(t/t-1)] \bar{\gamma} \right] \bar{p}_t \quad ,$$

il vient (2) :

$$p'_t \bar{e}_t = \bar{p}'_t \bar{e}_t \Leftrightarrow \bar{p}'_t \bar{\gamma} \bar{e}_t = 0 \quad .$$

(1) Cette condition implique évidemment :

$$p'_t \Delta e_t = \bar{p}'_t \Delta e_t \quad ,$$

Δe_t étant défini par les relations (91).

(2) On exclut le cas particulier : $\forall t, \Pi(t/t-1) = 1$, pour lequel

$$p_t = \bar{p}_t \quad .$$

On en déduit notamment que tous les coefficients γ_i ne peuvent être de même signe. Si, à l'époque t , il existe un bien i tel que $\bar{p}_{it} > p_{it}$, alors il existe au moins un autre bien j tel que $\bar{p}_{jt} < p_{jt}$, et réciproquement.

Posons :

$$\bar{h}_t = \bar{y}_t^{-1} \sum \bar{p}_t e(\bar{p}_t, \bar{y}_t)$$

avec, par additivité, $\iota' \bar{h}_t = 1$.

Les fonctions $\bar{h}_t$ doivent ainsi satisfaire les deux conditions suivantes :

$$\iota' \bar{h}_t = 1 \quad \text{et} \quad \gamma' \bar{h}_t = 0 \quad ,$$

indépendamment de $\bar{p}_t$ et $\bar{y}_t$.

La première condition implique des fonctions $\bar{h}_t$ de la forme :

$$\bar{h}_t = [\iota' h(\bar{p}_t, \bar{y}_t)]^{-1} h(\bar{p}_t, \bar{y}_t) \quad ,$$

tandis que la deuxième ne sera vérifiée que pour :

$$h(\bar{p}_t, \bar{y}_t) = b^* h^*(\bar{p}_t, \bar{y}_t) \quad ,$$

$h^*(\bar{p}_t, \bar{y}_t)$ étant une fonction scalaire et b^* un vecteur de paramètres tel que $\gamma' b^* = 0$.

Dès lors, pour :

$$b = (\iota' b^*)^{-1} b^* \quad ,$$

avec :

$$\iota' b = 1 \quad \text{et} \quad \gamma' b = 0 \quad ,$$

on aura $\bar{h}_t = b$.

Les fonctions $\bar{e}_t = \bar{e}(\bar{p}_t, \bar{y}_t)$ ont donc la forme particulière :

$$\bar{e}_t = \bar{y}_t \frac{\nu-1}{p_t} b \quad ,$$

et elles sont solution unique du problème (89) si et seulement si l'indicateur d'utilité envisagé peut s'écrire, à une transformation parétienne près :

$$u(\bar{e}_t) = \sum_i b_i \log(\bar{e}_{it}) \quad ,$$

où, par concavité stricte, $b > 0$.

Par ailleurs :

$$\Delta e_t = \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{y}_t} \Delta y_t = \Delta y_t \frac{\nu-1}{p_t} b \quad , \quad \text{et}$$

$$e_t = \bar{e}_t + \Delta e_t = (\bar{y}_t + \Delta y_t) \frac{\nu-1}{p_t} b = y_t \frac{\nu-1}{p_t} b \quad .$$

Etant donné que :

$$\frac{\nu-1}{p_t} = \frac{\nu-1}{p_t} \left[I - [1 - \Pi(t/t-1)] \frac{\nu}{\gamma} \right] \quad ,$$

en posant :

$$(93) \quad \begin{cases} b^0 = b - \frac{\nu}{\gamma} b & , \quad \text{et} \quad b^0 = 1 \\ b^1 = \frac{\nu}{\gamma} b & , \quad \text{et} \quad b^1 = 0 \end{cases}$$

il vient :

$$e_t = \bar{e}_t + \Delta e_t = \frac{\nu-1}{p_t} [b^0 + b^1 \Pi(t/t-1)] y_t \quad .$$

Pour les *consommations effectives* :

$$q_t = \bar{q}_t + \Delta e_t = c_t + e_t \quad ,$$

il en résulte les fonctions de consommation (92):

$$q_t = c_t + \frac{\nu-1}{p_t} [b^0 + b^1 \Pi(t/t-1)] (r_t - p'_t c_t) \quad ,$$

avec $p'_t q_t = r_t$.

En remarquant que la condition :

$$\bar{p}_t > 0 \Leftrightarrow [1 - \Pi(t/t-1)] \gamma_i < 1, \quad i=1,2,\dots,n,$$

assure, pour $b > 0$:

$$b_t = b^0 + b^1 \Pi(t/t-1) > 0,$$

les fonctions de consommation (92) sont ainsi définies pour :

$$r_t > p'_t c_t + \max_{c_{it} < 0} \left\{ \frac{p_{it} |c_{it}|}{b_{it}} \right\}.$$

Par hypothèse, les fonctions de consommation envisagées sont additives. Par contre, le système (92) ne satisfera pas aux relations de Slutsky ni à la propriété d'homogénéité de degré zéro, $\Pi(t/t-1)$ étant en général un indice de prix homogène de degré un.

Considérons par exemple l'indice des prix du type Laspeyres :

$$\Pi_L(t/t-1) = r_{t-1}^{-1} p'_t q_{t-1},$$

qui pour

$$c_t = c^0 + c^1 q_{t-1},$$

conduit à la spécification :

$$SLD \{ b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1) ; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1} \}.$$

Les paramètres c^1 explicitent les effets d'habitudes de consommation, et b_t s'interprète encore comme le vecteur des coefficients budgétaires marginaux.

Quant aux diverses élasticités, on a :

$$\mathcal{E}(q/r_t) = \epsilon_t = \omega_t^{-1} b_t \quad ,$$

$$\mathcal{E}(q/p'_t) = r_t^{-1} \check{\epsilon}_t \left[\omega_t c'_t + (r_t - p'_t c_t) (\check{p}_t^{-1} - r_{t-1}^{-1} \check{b}_t^{-1} b^1 q'_{t-1}) \right] \check{p}_t \quad ,$$

$$\mathcal{E}(q/q'_{t-1}) = r_t^{-1} \omega_t^{-1} \left[(I - b_t \omega_t') \check{c}'_t + r_{t-1}^{-1} (r_t - p'_t c_t) b^1 \omega_t' \right] \check{p}_t \check{q}_{t-1} \quad ,$$

tandis que la matrice des élasticités prix pures ⁽¹⁾ :

$$H_t^* = \mathcal{E}(q/p'_t) + \epsilon_t \omega_t' \quad ,$$

s'écrit :

$$H_t^* = - r_t^{-1} (r_t - p'_t c_t) \left[I - \omega_t b_t' - r_{t-1}^{-1} \check{b}_t^{-1} b^1 q'_{t-1} \check{p}_t \right] \quad .$$

Pour $i \neq j$, on remarquera que :

$$i) \quad \mathcal{E}(q_i/p_{jt}) \geq 0 \Leftrightarrow c_{jt} \leq \frac{r_t - p'_t c_t}{r_{t-1}} b_{it} b_i^1 q_{jt-1} \quad ,$$

$$\mathcal{E}(q_i/p_{jt}) < 0 \Leftrightarrow c_{jt} > \frac{r_t - p'_t c_t}{r_{t-1}} b_{it} b_i^1 q_{jt-1} \quad ;$$

$$ii) \quad \mathcal{E}(q_i/q_{jt-1}) \geq 0 \Leftrightarrow c_j^1 \leq \frac{r_t - p'_t c_t}{r_{t-1}} \frac{b_i^1}{b_{it}} \quad ,$$

$$\mathcal{E}(q_i/q_{jt-1}) < 0 \Leftrightarrow c_j^1 > \frac{r_t - p'_t c_t}{r_{t-1}} \frac{b_i^1}{b_{it}} \quad ;$$

$$iii) \quad \eta_{ijt}^* \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{b_{it}}{b_{jt}} \frac{q_{jt-1} p_{jt}}{r_{t-1}} b_i^1 \quad ,$$

$$\eta_{ijt}^* < 0 \Leftrightarrow -1 > \frac{b_{it}}{b_{jt}} \frac{q_{jt-1} p_{jt}}{r_{t-1}} b_i^1 \quad .$$

(1) Les effets-prix purs peuvent être envisagés indépendamment du cadre de la théorie des choix. Il s'agit alors d'éliminer l'effet dépense totale $(-\epsilon_t \omega_t')$ des effets prix apparents (cf. [47], pp. 22-23). Dans ce cas, l'élément générique η_{ijt}^* de H_t^* n'a plus forcément le même signe que l'élément η_{jit}^*

Comme $b_i^1 = \gamma_i$, b_i et $b_i > 0$, on constate en particulier que les biens à coefficient γ_i positifs sont substituables au sens des effets-prix apparents par rapport aux biens supérieurs (tels que $c_{jt} < 0$), et substituables au sens des effets-prix purs par rapport à tous les biens. Par contre, ils sont complémentaires dans le temps par rapport aux biens ne donnant pas lieu à formation d'habitudes ($c_j^1 \leq 0$). Pour ce qui est des biens à coefficients γ_i négatifs, ils sont complémentaires d'après les effets prix apparents par rapport aux biens de première nécessité ($c_{jt} > 0$), et ils sont substituables dans le temps par rapport aux biens pour lesquels il y a formation d'habitude ($c_j^1 > 0$).

Dans une situation de longue période, on a :

$$\Pi_L(t/t-1) = 1 \quad , \quad \forall t \in I_\ell \quad ,$$

d'où $p_t = \bar{p}_t = p$, fonctions de consommation normale et fonctions de consommation effective sont confondues, et la spécification ci-dessus dessus admet évidemment le système SLD statique comme solution de l'équilibre de longue période.

Par la suite, on envisagera encore la spécification suivante des fonctions de consommation (92) :

$$\text{SLD} \quad \{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1) ; c_t = c^0\}$$

qui particularise la spécification :

$$\text{SLD} \quad \{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1) ; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\} \quad .$$

D'autres spécifications peuvent évidemment être envisagées, notamment en ce qui concerne le choix des fonctions $\Pi(t/t-1)$ ⁽¹⁾ .

(1) On pourrait par exemple songer à introduire d'autres variables dans la définition des prix normaux. Mais cela accroîtrait le nombre déjà élevé de paramètres à estimer.

5. Formulations tenant compte des plans de consommation future

En raison des inconvénients déjà cités, on ne reviendra pas dans ce paragraphe sur des applications de l'approche proposée par Philips dans le domaine de la prise en compte des plans de consommation future (1) .

Dans l'optique des niveaux de consommation désirée, on envisage, comme spécification particulière des relations (47) qui définissent les consommations désirées q_t^* , les fonctions du système linéaire de dépenses statique écrites pour l'époque t :

$$(94) \quad q_t^* = c + p_t^{\nu-1} b (r_t - p_t' c) .$$

Le premier mécanisme d'adaptation retenu quant aux fonctions de dépense résulte des relations (51) et (53):

$$\begin{aligned} d_t &= d_t^* + \Delta d_t , & \iota' \Delta d_t &= 0 , \\ \Delta d_t &= R (d_t^* - d_{t-1}) , & \iota' R &= 0' , \end{aligned}$$

avec
$$d_t^* = p_t^{\nu} q_t^* .$$

On est ainsi conduit au système des fonctions de consommation en volume :

$$(95) \quad q_t = p_t^{\nu-1} D p_t^{\nu} q_t^* + p_t^{\nu-1} (I - D) p_{t-1}^{\nu} q_{t-1}$$

où q_t^* est donné par (94), et $D = I + R$, $\iota' D = \iota'$. Ce système, que l'on nommera par commodité SAD, est additif, mais n'est pas homogène de degré zéro.

Les relations suivantes lient les élasticités des fonctions de

(1) Voir Chapitre II, point 3., paragraphe 3.1 .

consommation SAD à celles du système SLD (94) :

$$i) \quad \mathcal{E}(q/r_t) = \mathcal{E}(q/q_t^*) \mathcal{E}(q^*/r_t) \quad ,$$

$$\text{avec } \mathcal{E}(q/q_t^*) = \check{d}_t^{-1} D \check{d}_t^* \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(q^*/r_t) = \check{\omega}_t^{*-1} b \quad :$$

$$ii) \quad \mathcal{E}(q/p_t') = \mathcal{E}(q/q_t^*) [I + \mathcal{E}(q^*/p_t')] - I \quad ,$$

$$\text{avec } \mathcal{E}(q^*/p_t') = -r_t^{-1} \mathcal{E}(q^*/r_t) [I c' \check{p}_t + (r - p_t' c) I] \quad ,$$

alors que les complémentarités et les substituabilités dans le temps découlent du signe des éléments de la matrice :

$$\mathcal{E}(q/q_{t-1}') = \check{d}_t^{-1} (I - D) \check{d}_{t-1}^* \quad (1) .$$

En situation de longue période, on vérifie aisément que les fonctions de consommation (95) se confondent à l'équilibre au niveau des consommations désirées :

$$(96) \quad q = q^* = c + \check{p}^{-1} b (r - p'c) \quad ,$$

et que la stabilité de cet équilibre dépend des valeurs propres de la matrice $(I - D)$.

Toujours pour les fonctions de dépense, le mécanisme d'adaptation défini par la matrice R et les relations (54) :

$$\Delta d_t = R \Delta d_{t-1} \quad , \quad \iota' \Delta d_t = 0 \quad , \quad \text{avec}$$

$$\Delta d_t = d_t - d_t^* \quad \text{et} \quad \iota' R = \rho \iota' \quad ,$$

donne lieu au système de fonctions de consommation en volume SAR :

$$(97) \quad q_t = q_t^* + \check{p}_t^{-1} R \check{p}_{t-1} (q_{t-1} - q_{t-1}^*) \quad .$$

(1) Comme on l'a déjà souligné, on ne pourra, dans le cadre de ces formulations, expliciter des effets d'habitude de consommation (Voir Chapitre II, p. 35).

Pour ce modèle, on a les relations suivantes entre élasticités :

- i) $\mathcal{E}(q/r_t) = \mathcal{E}(q/q_t^*) \mathcal{E}(q^*/r_t)$,
 avec $\mathcal{E}(q/q_t^*) = \check{q}_t^{-1} \check{q}_t^*$;
- ii) $\mathcal{E}(q/p_t') = \mathcal{E}(q/q_t^*) \left[I + \mathcal{E}(q^*/p_t') \right] - I$,

et de la matrice :

$$\mathcal{E}(q/q_{t-1}') = \check{d}_t^{-1} R \check{d}_{t-1}$$
 ,

résulte la mise en évidence des effets de substituabilité et de complémentarité dans le temps.

On remarquera en particulier que le signe des élasticités-prix et dépense totale du modèle SAR n'est pas modifié par rapport au signe des élasticités-prix et dépense totale du système SLD (94) exprimant les consommations désirées.

Enfin, l'équilibre de longue période, donné par les relations (96), est stable si et seulement si le rayon spectral de la matrice R est inférieur à l'unité ⁽¹⁾.

Envisagé pour les fonctions de consommation en volume, le mécanisme d'adaptation qui résulte des relations (50) et (56):

$$q_t = q_t^* + \Delta q_t \quad , \quad p_t' \Delta q_t = 0 \quad ,$$

$$\Delta q_t = \check{p}_t^{-1} B \check{p}_t (q_t^* - q_{t-1}') \quad , \quad \iota' B = 0' \quad ,$$

conduit aux fonctions de consommation SAQ :

$$(98) \quad q_t = \check{p}_t^{-1} Q \check{p}_t q_t^* + \check{p}_t^{-1} (I - Q) \check{p}_t q_{t-1}' \quad ,$$

avec $Q = B + I$, $\iota' Q = \iota'$.

(1) Comme $\iota' R = \rho \iota'$, ρ est la valeur propre de R associé au vecteur ligne caractéristique ι' , et en vertu de la condition de stabilité : $|\rho| < 1$.

Les relations entre élasticités s'écrivent dès lors :

- i) $\bar{G}(q/r_t) = \bar{G}(q/q_t^*) \bar{G}(q_t^*/r_t)$,
avec $\bar{G}(q/q_t^*) = \check{d}_t^{-1} Q \check{d}_t^*$;
- ii) $\bar{G}(q/p_t') = \bar{G}(q/q_t^*) [I + \bar{G}(q^*/p_t')] + \bar{G}(q/q_{t-1}') - I$,
où la matrice $\bar{G}(q/q_{t-1}')$ est donnée par :

$$\bar{G}(q/q_{t-1}') = \check{d}_t^{-1} (I - Q) \check{p}_t \check{q}_{t-1}' .$$

Ici encore, les relations (96) expriment le niveau d'équilibre de longue période, tandis que le problème de la stabilité de cet équilibre revient à étudier les valeurs propres de la matrice $(I - Q)$.

Les fonctions de consommation (98) sont évidemment additives, et elles possèdent en plus la propriété d'homogénéité de degré zéro par rapport aux prix p_t et à la dépense totale r_t .

On peut alors se demander s'il existe une forme particulière de la matrice B et un vecteur $\Delta \bar{q}_t$ tel que le mécanisme d'adaptation défini par :

$$q_t = q_t^* + \Delta q_t , \quad p_t' \Delta q_t = 0 ,$$

$$\Delta q_t = \check{p}_t^{-1} B \check{p}_t \Delta \bar{q}_t , \quad \text{et } B = 0 ,$$

conduise à un système de fonctions de consommation compatible avec les hypothèses de la théorie des choix. Comme q_t^* est donné par les fonctions (94) du système linéaire de dépenses statique, en choisissant $\Delta \bar{q}_t$ indépendamment de p_t et r_t , on retrouve le résultat déjà cité ⁽¹⁾ que les fonctions de consommation :

(99) $q_t = q_t^* + \check{p}_t^{-1} B \check{p}_t \Delta \bar{q}_t$, et $B = 0$,
vérifient les hypothèses de la théorie des choix si et seulement

(1) Voir page 65.

si la matrice B est de la forme :

$$B = (I - b \iota') \quad , \quad \iota' b = 1 \quad .$$

Compte tenu de (94) , les fonctions de consommation (99) peuvent ainsi s'écrire :

$$q_t = c + \Delta \bar{q}_t + \check{p}_t^{-1} b [r_t - p_t' (c + \Delta \bar{q}_t)] \quad .$$

En particulier, lorsque l'on pose $\Delta \bar{q}_t = \check{c} q_{t-1}$, on obtient une spécification du type :

$$SLD \{ b_t = b^0 \quad c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1} \} \quad ,$$

introduite en vue de tenir compte de l'influence du passé ⁽¹⁾ .

(1) Voir page 61 .

ANNEXE

Remarques sur les valeurs propres de la matrice $(I - b \, u') \, c^1$

Soit $\Phi(\lambda) = 0$ l'équation caractéristique de la matrice

$A = (I - b \, u') \, c^1$. On a :

$$\Phi(\lambda) = |A - \lambda I|, \quad \text{avec}$$

$$|A - \lambda I| = (-1)^n \prod_{i=1}^n b_i c_i^1 | \check{a} + u u' |, \quad$$

où l'on pose :

$$\check{a} = (\check{b} \, c^1)^{-1} (\lambda I - c^1).$$

Comme :

$$| \check{a} + u u' | = \prod_{i=1}^n a_i \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right),$$

il vient :

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (c_i^1 - \lambda) \left(1 - \sum_i \frac{b_i c_i^1}{c_i^1 - \lambda} \right),$$

ce qui peut s'écrire ⁽¹⁾ :

$$\Phi(\lambda) = \lambda \, \Phi^*(\lambda) = \lambda \sum_{i=1}^n b_i x_i(\lambda),$$

avec

$$x_i(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^n (c_j^1 - \lambda)}{c_i^1 - \lambda}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

On a évidemment $\Phi(0) = 0$.

Désignons par λ^* une valeur propre générique, réelle, différente de zéro de la matrice A. λ^* vérifie :

$$\Phi^*(\lambda^*) = \sum_i b_i x_i(\lambda^*) = 0.$$

(1) On tient compte du fait que $u' b = 1$.

Pour $b > 0$, $c^1 b = 1$, et c^1 quelconque, on aura en général ⁽¹⁾ :

$$\exists i ; x_i(\lambda^*) > 0 ,$$

ce qui implique :

$$\exists j ; x_j(\lambda^*) < 0 ,$$

et réciproquement.

On en déduit que :

$$c_m^1 < \lambda^* < c_M^1 ,$$

avec
$$c_M^1 = \max. \{c_i^1\} \quad \text{et}$$

$$i=1,2,\dots,n$$

$$c_m^1 = \min. \{c_i^1\} .$$

$$i=1,2,\dots,n$$

En effet, supposons par exemple $\lambda^* > c_M^1$. On a alors :

$$c_i^1 - \lambda^* < 0 , \quad i=1,2,\dots,n ,$$

et $\phi^*(\lambda^*) \neq 0$, car

$$x_i(\lambda^*) > 0 , \quad i=1,2,\dots,n , \quad \text{pour } n \text{ impair, et}$$

$$x_i(\lambda^*) < 0 , \quad i=1,2,\dots,n , \quad \text{pour } n \text{ pair.}$$

De même :

$$\lambda^* < c_m^1 \Leftrightarrow c_i^1 - \lambda^* > 0 , \quad i=1,2,\dots,n ,$$

$$\text{c'est-à-dire : } x_i(\lambda^*) > 0 , \quad i=1,2,\dots,n ,$$

$$\text{et } \phi^*(\lambda^*) > 0 .$$

(1) On ne peut avoir $x_i(\lambda^*) = 0$, $i=1,2,\dots,n$, que si :

$$\exists i, j ; \quad \lambda^* = c_i^1 = c_j^1 , \quad i \neq j .$$

Par ailleurs, on montre également que, pour $c^1 > 0$ (où $c^1 < 0$), les valeurs propres de la matrice $A = (I - b \iota') \check{c}^1$ sont toutes réelles.

On vérifie en effet que :

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |B - \lambda I| = 0 ,$$

où B est une matrice symétrique donnée par :

$$B = \check{c}^1 - \gamma \gamma' , \quad \text{avec}$$

$$\gamma = \left\| \sqrt{b_i c_i} \right\| , \quad i=1,2,\dots,n .$$

On a :

$$\check{\gamma}^{-1} (B - \lambda I) \check{\gamma}^{-1} = - (\check{a} + \iota \iota') ,$$

d'où :

$$|A - \lambda I| = |B - \lambda I| .$$

La matrice B étant symétrique, ses valeurs propres, qui sont également les valeurs propres de la matrice A, sont réelles.

En particulier, pour $0 < c^1 < \iota$, (où $-\iota < c^1 < 0$) , le rayon spectral de la matrice $A = (I - b \iota') \check{c}^1$ est inférieur à l'unité.

Chapitre IV AUTRES APPLICATIONS

1. Le système linéaire de dépenses généralisé

La généralisation du système linéaire de dépenses que l'on se propose de rappeler ici, en vue notamment d'une application dynamique dans l'optique de l'influence du passé et des formations d'habitudes, a déjà été l'objet de plusieurs études ⁽¹⁾. Aussi, comme on l'a fait pour le système linéaire de dépenses, on se contentera de résumer brièvement les aspects intéressants de la version statique de ce modèle qui se transposent dans le cadre de l'approche dynamique retenue.

1.1 Le système linéaire de dépenses généralisé statique

La version statique du système linéaire de dépenses généralisé (SLDG) peut être envisagée de manière équivalente à deux niveaux.

- Au niveau des fonctions de consommation du système SLD statique (69), on admet que les coefficients budgétaires marginaux varient en fonction des prix. On pose :

$$w_i^* = \frac{b_i p_i^{-a}}{\sum_j b_j p_j^{-a}}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

et les *fonctions de consommation* SLDG s'écrivent :

$$(100) \quad q_i = c_i + p_i^{-1} \frac{b_i p_i^{-a}}{\sum_j b_j p_j^{-a}} (r - pc') \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (2) \quad .$$

(1) Voir notamment [4], [8], [18] et [24].

(2) Ces fonctions de consommation sont homogènes de degré zéro par rapport aux paramètres b . Par la suite, on choisira $b_n = 1$ comme règle de normalisation.

Comme la matrice :

$$K = \frac{\partial q}{\partial \omega^*}, \frac{\partial \omega^*}{\partial p} = a (r - pc') p^{-1} (\omega^* p' - I) \omega^* p^{-1},$$

est symétrique, on en déduit ⁽¹⁾, d'après les relations (14), que les relations de Slutsky sont vérifiées pour les fonctions de consommation (100).

- Au niveau de l'indicateur d'utilité, on établit aisément que :

$$(101) \quad u(q) = \sum_i b_i^* \frac{(q_i - c_i)^{a^*-1}}{a^*},$$

tend vers l'indicateur du système linéaire de dépenses (70) lorsque $a^* \rightarrow 0$. De plus, l'application des conditions d'optimum (8) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial q} = \lambda p \\ p'q = r \end{cases},$$

conduit au système de fonctions de consommation (100), avec :

$$a = \frac{a^*}{1-a^*} \quad \text{et} \quad b_i = b_i^* \frac{1}{1-a^*}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Pour un champ de choix tel que :

$$q > \max. [c; 0],$$

en vertu de l'hypothèse de non-saturation et par concavité stricte de l'indicateur d'utilité (101), on obtient :

$$a > -1 \quad \text{et} \quad b_i < 0, \quad i=1,2,\dots,n,$$

et les fonctions de consommation du système SLDG seront définies lorsque :

$$r > pc' + \max_{c_i < 0} \left\{ \frac{p_i |c_i|}{\omega_i^*} \right\}.$$

(1) Voir Chapitre II, point 1, paragraphe 1.2

L'interprétation économique des paramètres c reste évidemment la même que celle dégagée dans le cadre du système SLD, et ici encore on pourra transposer l'extension conceptuelle du système linéaire de dépenses proposée par L. Solari (1).

Quant à l'interprétation du paramètre a , elle se dégage d'une analyse de l'évolution des coefficients budgétaires marginaux :

$$\omega_i^* = \frac{b_i p_i^{-a}}{\sum_j b_j p_j^{-a}},$$

en fonction des prix p_i et p_j ($i \neq j$) et d'après les différentes valeurs admissibles pour a , qui est résumée ci-après :

variation de ω_i^*	en fonction de p_i	en fonction de $p_j, i \neq j$
$a \rightarrow -1$	$\omega_i^* \rightarrow \frac{p_i}{\sum_j p_j}$	
$-1 < a < 0$	croissante	décroissante
$a \rightarrow 0$	$\omega_i^* \rightarrow b_i$	
$a > 0$	décroissante	croissante
$a \rightarrow \infty$	$\omega_i^* \rightarrow \frac{\delta_{ik} b_k^*}{\sum_{i \in K} b_i^*}, k \in K = \left\{ k / \frac{p_k}{b_k^*} = \min_h \left[\frac{p_h}{b_h^*} \right] \right\}$ (2)	

C'est ainsi que, relativement au système linéaire de dépenses pour lequel $a = 0$ et $\frac{\partial \omega_i^*}{\partial p_j} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n$, F. Carlevaro et

(1) Cf. [44]. On remarquera en particulier que pour le champ de choix $Q = \{q/q \geq \max. [c_i; 0]\}$, les biens supérieurs, à coefficients $c_i < 0$ sont hiérarchisés d'après les rapports $\frac{p_i |c_i|}{\omega_i^*}$.

(2) δ_{ik} désigne le delta de Kronecker, On rappelle que $b_i = b_i^* \frac{1}{1-a^*}$.

E. Rossier ont été conduit ⁽¹⁾ à caractériser l'ensemble des fonctions de consommation du système SLDG comme étant :

- à faible substitution pour $-1 < a < 0$;
- à substitution normale pour $a = 0$;
- à forte substitution pour $a > 0$.

En particulier, pour $a \rightarrow -1$, $\frac{\partial q}{\partial r} = (\iota'p)^{-1} \iota$, les propensions marginales à consommer sont égales entre elles et les biens deviennent indépendants. Lorsque $a \rightarrow \infty$, l'indicateur du système SLDG est linéaire, toute augmentation de la dépense totale est affectée entièrement aux biens d'indice $k \in K$ et une faible variation des prix peut changer brusquement l'affectation de la dépense totale à un autre groupe de biens.

L'analyse des élasticités éclaire également le contenu économique du système SLDG et précise en particulier l'effet conjoint des paramètres a et c . Dans ce but, on établit :

$$\epsilon = \mathcal{E}(q/r) = \omega^{-1} \omega^* ,$$

$$H = \mathcal{E}(q/p') = -r^{-1} \epsilon \left[\iota c' \check{p} + (r - pc') [I + a (I - \iota \omega^*)] \right] ,$$

alors que la matrice des élasticités-prix pures s'écrit :

$$H^* = H + \epsilon \omega' = r^{-1} (r - pc') (1 + a) \epsilon (\iota \omega^* - I) .$$

Ainsi, dans le cadre de la théorie des choix, on a :

- i) $0 < \epsilon_i \leq 1 \Leftrightarrow \omega_i^* \leq \omega_i$, $1 \Leftrightarrow \omega_i^* > \omega_i$;
- ii) $-1 \leq \eta_{ij} < 0 \Leftrightarrow c_i \geq \frac{a}{1+a} q_i$, $\eta_{ii} < -1 \Leftrightarrow c_i < \frac{a}{1+a} q_i$;
- iii) $i \neq j$, $\eta_{ij} \leq 0 \Leftrightarrow c_j \geq \frac{a}{1+a} q_j$, $\eta_{ij} > 0 \Leftrightarrow c_j < \frac{a}{1+a} q_j$;
- iv) $-1 \leq \eta_{ii}^* < 0 \Leftrightarrow c_i \geq (a - \frac{\omega_i^*}{1-\omega_i^*}) \frac{q_i}{1+a}$, $\eta_{ii}^* < -1 \Leftrightarrow c_i < (a - \frac{\omega_i^*}{1-\omega_i^*}) \frac{q_i}{1+a}$;
- v) $i \neq j$, $\eta_{ij}^* > 0$.

(1) Cf. [8] .

Comme pour le système SLD statique, on remarque que les élasticités-dépense totale sont positives, qu'elles sont les plus élevées pour les biens supérieurs ($c_i < 0$) et qu'elles se rangent par valeurs décroissantes en fonctions des rapports $\frac{p_i c_i}{\omega_i^*}$.

D'après les élasticités-prix apparentes, les biens de première nécessité ($c_i > 0$) relevant d'un système de fonctions de consommation à faible substitution ($-1 < a < 0$) sont inélastiques ($-1 < \eta_{ii} < 0$) et complémentaires par rapport à tous les autres biens ($\eta_{ij} < 0$, $i \neq j=1,2,\dots,n$). De manière tout à fait symétrique, s'il s'agit d'un système de fonctions à forte substitution ($a > 0$), les fonctions de consommation supérieures ($c_i < 0$) sont élastiques ($\eta_{ii} < -1$) et substituables ($\eta_{ij} > 0$, $i \neq j=1,2,\dots,n$) ⁽¹⁾.

Enfin, les élasticités-prix pures ne font apparaître que des effets de substitution.

1.2 Formulations dans l'optique des habitudes de consommation

A l'époque t , une formulation dynamique d'un système de fonctions de consommation du type SLDG s'écrit :

$$(102) \quad q_{it} = c_{it} + p_{it}^{-1} \frac{b_i p_{it}^{-a}}{\sum_j b_j p_{jt}^{-a}} (r_t - p'_t c_t) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad ,$$

où le vecteur :

$$c_t = c(q_{t-1}, \dots, q_{t-k}, x_t) \quad ,$$

tient compte de l'influence du passé.

Par référence au système linéaire de dépenses, on peut considérer les fonctions de consommation (102) ci-dessus comme une spécification particulière de l'écriture (73) d'un système SLD dynamique ⁽²⁾:

(1) Pour $a > 0$ et $c_i > 0$ ou $-1 < a < 0$ et $c_i < 0$, il faut considérer la position de q_i par rapport à $\frac{1+a}{a} c_i$. Cf. [8].

(2) Voir Chapitre III, point 2..

$$q_t = c_t + p_t^{-1} b_t (r_t - p_t' c_t) \quad , \quad ,$$

où l'on a posé :

$$b_{it} = \frac{b_i p_{it}^{-a}}{\sum_j b_j p_{jt}^{-a}} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (1).$$

Dans la mesure où les variables c_t ne dépendent pas des prix p_t ou de la dépense totale r_t , les résultats de l'analyse du contenu économique des fonctions de consommation du système SLDG statique sont également valables à l'époque t pour le système (102).

La mise en évidence des effets d'habitudes de consommation peut être envisagée dans le cadre de la spécification :

$$\text{SLDG } \{c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}\} \quad ,$$

qui résulte des fonctions de consommation (102) en posant :

$$c_{it} = c_i^0 + c_i^1 q_{it-1} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad .$$

Pour cette spécification, on a en particulier :

$$\mathcal{Q}(q/q'_{t-1}) = \check{q}_t^{-1} (I - \check{p}_t^{-1} \omega^* p_t') \check{c}^1 \check{q}_{t-1}^{-1} \quad ,$$

relation qui donne lieu à une discussion analogue à celle faite⁽²⁾ pour le modèle SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}\}$. Notamment, les biens à coefficient $c_i^1 > 0$ (formation d'habitudes) sont substituables dans le temps par rapport à tous les autres biens, alors que

(1) En définissant la fonction :

$$u(e_t) = \sum_i b_i^* \frac{e_{it}^{a^*} - 1}{a^*} \quad ,$$

$$\text{avec } a = \frac{a^*}{1-a^*} > -1 \quad \text{et} \quad b_i = b_i^* \frac{1}{1-a^*} > 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad ,$$

on pourrait évidemment déduire les fonctions de consommation (102) du problème d'optimum (42). Voir Chapitre II, pp. 31-32.

(2) Voir Chapitre III, page 61.

pour les biens à coefficient $c_i^1 < 0$ (effacement d'habitudes) on observera des effets de complémentarité dans le temps par rapport aux autres biens.

En situation de longue période, on vérifie aisément que le niveau d'équilibre est donné par les fonctions de consommation du système SLDG statique :

$$(103) \quad q_i = c_i + \frac{p_i^{-1} \beta_i p_i^{-a}}{\sum_j \beta_j p_j^{-a}} (r - pc') , \quad i=1,2,\dots,n ,$$

où l'on a posé :

$$\beta_i = \frac{b_i}{1-c_i} \quad \text{et} \quad c_i = \frac{c_i^0}{1-c_i^1} , \quad i=1,2,\dots,n .$$

Dès lors, étant donné le système d'équations aux différences :

$$q_t = p^{-1} (I - \omega^* \iota') \check{c}^{-1} p^{\vee} q_{t-1} + c^0 + p^{-1} \omega^* (r - p'c^0) , \quad t \in I_{\mathbb{Z}} ,$$

la stabilité de l'équilibre (103) dépend des valeurs propres de la matrice $(I - \omega^* \iota') \check{c}^{-1} (1)$.

Comparées à la spécification SLD $\{b_t = b^0, c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}\}$, les fonctions de consommation SLDG $\{c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}\}$ rendent possible l'évolution des coefficients budgétaires marginaux en fonction des prix et permettent d'explicitier, d'après le paramètre a , le degré de substitution de l'ensemble des biens considérés.

2. Le système indirect addilog

Dans sa version statique, dont nous donnerons un bref résumé, le système de fonctions de consommation indirect addilog SIA a été proposé par Houthakker⁽²⁾. Quant à la formulation dynamique que

(1) Voir l'annexe au Chapitre III, pp. 84-86.

(2) Cf. [21]. Pour ce système, des applications empiriques figurent notamment dans [8], [18], [34], [47] et [58] .

que nous suggérons pour ce système, elle se fonde sur les concepts introduits au paragraphe 2.2 du Chapitre II.

2.1 Le système indirect addilog statique

Les fonctions de consommation du système indirect addilog statique peuvent s'écrire :

$$(104) \quad q_i = \frac{b_i \left(\frac{r}{p_i}\right)^{a_i+1}}{\sum_j b_j \left(\frac{r}{p_j}\right)^{a_j}}, \quad i=1,2,\dots,n$$

Elles se déduisent d'une classe parétienne d'indicateurs d'utilité indirects, dont l'un au moins est additif, de la forme :

$$(105) \quad \psi(\pi) = \sum_i b_i \frac{\pi_i^{-a_i-1}}{a_i},$$

où $\pi = r^{-1} p$, grâce aux relations (9) :

$$q = \left[\pi, \frac{\partial \psi}{\partial \pi} \right]^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \pi}.$$

Les hypothèses de non-saturation et de convexité stricte de $\psi(\pi)$ donnent lieu aux restrictions suivantes quant aux valeurs admissibles des paramètres (1) :

$$b > 0 \quad \text{et} \quad a > -1.$$

L'analyse des élasticités permet de préciser le contenu économique du modèle SIA et met notamment en évidence le rôle joué par les paramètres a .

(1) Les fonctions de consommation (104) sont homogènes de degré zéro par rapport aux paramètres b , et l'on choisira $b_n = 1$ comme règle de normalisation.

En posant $\bar{a} = \omega' a$, on obtient :

$$\epsilon = \zeta(q/r) = \iota + a - \bar{a} \iota \quad ,$$

$$H = \zeta(q/p') = \iota a' \check{\omega} - (I + \check{a}) \quad , \quad \text{et}$$

$$H^* = H + \epsilon \omega' = \iota a' \check{\omega} + (\iota + a - \bar{a} \iota) - (I + \check{a}) \quad .$$

On a ainsi :

$$\text{i)} \quad \epsilon_i \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i \leq \bar{a} - 1 \quad ,$$

$$0 < \epsilon_i \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} - 1 < a_i \leq \bar{a}$$

$$\epsilon_i > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_i > \bar{a} \quad ;$$

$$\text{ii)} \quad -1 \leq \eta_{ii} < -\omega_i \Leftrightarrow -1 < a_i \leq 0 \quad ,$$

$$\eta_{ii} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad a_i > 0 \quad ;$$

$$\text{iii)} \quad i \neq j, \eta_{ij} < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < a_j \leq 0 \quad ,$$

$$\eta_{ij} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_j > 0 \quad ;$$

$$\text{iv)} \quad -1 \leq \eta_{ii}^* < -\omega_i(\bar{a}+1) \Leftrightarrow -1 < a_i \leq \frac{\omega_i - \sum_{j \neq i} \omega_j a_j}{(1-\omega_i)^2} \quad ;$$

$$\eta_{ii}^* < -1 \quad \Leftrightarrow \quad a_i > \frac{\omega_i - \sum_{j \neq i} \omega_j a_j}{(1-\omega_i)^2}$$

$$\text{v)} \quad i \neq j, \eta_{ij}^* < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i + a_j \leq \bar{a} - 1 \quad ,$$

$$\eta_{ij}^* > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i + a_j > \bar{a} - 1 \quad .$$

Les élasticités-dépense totale s'ordonnent d'après les valeurs croissantes des paramètres a_i et l'on remarquera que l'è modèle SIA permet des situations à élasticités-dépense totale négatives ⁽¹⁾. Toutefois, pour que $\epsilon_i < 0$, il faut que l'un au moins des a_j soit positif. Les biens tels que $\epsilon_i < 0$ sont qualifiés, dans la littérature économique, de biens inférieurs.

Au sens des élasticités-prix apparentes, tous les biens sont complémentaires ($\eta_{ij} < 0$, $i \neq j=1,2,\dots,n$) par rapport aux fonctions de consommation inélastiques ($-1 < \eta_{ii} < -\omega_i$) dont le coefficient a_i est négatif. De même, les biens sont substituables ($\eta_{ij} > 0$, $i \neq j=1,2,\dots,n$) par rapport aux fonctions de consommation élastiques ($\eta_{ii} < -1$), dont le coefficient a_i est positif. Par ailleurs, on a les restrictions suivantes entre les élasticités-prix apparentes :

$$\eta_{ij} = \eta_{kj}, \quad i \neq j \quad \text{et} \quad k \neq j, \quad ,$$

d'après laquelle l'influence du prix d'un bien est la même, au niveau des élasticités, sur les consommations des autres biens.

D'après les effets-prix purs, on pourra observer des phénomènes de complémentarité ($\eta_{ij}^* < 0$, $i \neq j$), ce qui n'était pas possible dans le cadre des versions statiques des modèles SLD et SLDG. Plus précisément, les relations de substituabilité ou de complémentarité-prix pure entre les fonctions de consommation i et j dépendront de la position de $a_i + a_j$ par rapport à $\bar{a} - 1$.

Le modèle indirect addilog statique présente par contre l'inconvénient de ne pouvoir expliciter des quantités de consommation obligée et la notion de biens de première nécessité (ou biens supérieurs) qui s'y rattache, dont l'importance est primordiale dans une version dynamique visant à l'analyse des effets d'habitudes.

(1) Le paradoxe de Giffen ($\eta_{ii} > 0$) est cependant exclu.

2.2 Formulations dans l'optique des habitudes de consommation

Afin de tenir compte de l'influence du passé dans le cadre d'un système de fonctions de consommation du type SIA, on considère le problème d'optimum (44):

$$\begin{cases} \min. \psi(\bar{\pi}_t) , \\ \bar{\pi}_t \\ \bar{\pi}'_t e_t = 1 \end{cases} ,$$

où la fonction ψ est de même forme que l'indicateur d'utilité indirect (105) du système SIA :

$$\psi(\bar{\pi}_t) = \sum_i b_i \frac{\bar{\pi}_{it}^{-a_i} - 1}{a_i} .$$

Quant aux variables $\bar{\pi}_t$, rappelons qu'elles résultent du changement de variable $e_t = q_t - c_t$ et qu'elles sont définies par :

$$\bar{\pi}_t = y_t^{-1} p_t , \text{ avec}$$

$$y_t = r_t - p'_t c_t .$$

Dès lors, en supposant que c_t ne dépend pas de p_t ou de r_t , les fonctions $e_t = e(p_t, y_t)$ solution du problème d'optimum ci-dessus (1) :

$$e_{it} = \frac{b_i \left(\frac{y_t}{p_{it}}\right)^{a_i+1}}{\sum_j b_j \left(\frac{y_t}{p_{jt}}\right)^{a_j}} , \quad i=1,2,\dots,n$$

conduisant aux fonctions de consommation du type SIA :

$$(106) \quad q_{it} = c_{it} + p_{it}^{-1} \frac{b_i \left(\frac{y_t}{p_{it}}\right)^{a_i}}{\sum_j b_j \left(\frac{y_t}{p_{jt}}\right)^{a_j}} (r_t - p'_t c_t) , \quad i=1,2,\dots,n ,$$

(1) On admet évidemment les restrictions a priori :

$a > -1$ et $b > 0$,
qui garantissent la convexité stricte de $\psi(\bar{\pi}_t)$.

qui, pour $q_t > \max. \{c_t; 0\}$, sont compatibles avec les hypothèses de la théorie des choix. De même que pour le système SLDG (102), on peut encore considérer les fonctions de consommation (106) comme un cas particulier du modèle dynamique (73):

$$q_t = c_t + p_t^{v-1} b_t (r_t - p_t' c_t) ,$$

pour lequel :

$$b_{it} = \frac{b_i \left(\frac{y_t}{p_{it}}\right)^{a_i}}{\sum_j b_j \left(\frac{y_t}{p_{jt}}\right)^{a_j}} , i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

Comme $\bar{\pi}_t = (1 - \pi_t' c_t)^{-1} \pi_t$, $\pi_t = r_t^{-1} p_t$, l'indicateur d'utilité indirect associé au système (106) s'écrit :

$$\varphi(\pi_t) = \sum_i b_i \frac{\left(\frac{1 - \pi_t' c_t}{\pi_{it}}\right)^{a_i}}{a_i} ,$$

et il est quasi-convexe au sens strict ⁽²⁾ par rapport à π_t pour $a > -1$ et $b > 0$.

Afin de procéder à une première analyse du contenu économique des fonctions de consommation dynamiques du type (106), on écrira, en omettant l'indice t de la période, le modèle sous la forme :

$$(107) \quad q = c + p^{v-1} \bar{\omega} (r - pc') \quad (3) ,$$

$$\text{avec } \bar{\omega}_i = \frac{b_i \left(\frac{y}{p_i}\right)^{a_i}}{\sum_j b_j \left(\frac{y}{p_j}\right)^{a_j}} , i=1,2,\dots,n , \quad \text{et } y = r - pc' .$$

(1) Dans ce cas, b_t est fonction de r_t et ne peut d'interpréter comme le vecteur des coefficients budgétaires marginaux.

(2) Voir Chapitre II, pp. 33-34.

(3) Il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'en posant $c_{it} = c_i, \forall t$, dans les fonctions de consommation (106), on obtient un modèle statique, compatible avec les hypothèses de la théorie des choix, et qui s'écrit sous la forme des relations (107) ci-dessus.

En posant :

$$e = q - c \quad \text{et} \quad \bar{a} = \bar{\omega}'a \quad ,$$

on obtient aisément, grâce aux relations (43) ⁽¹⁾, les expressions suivantes quant aux diverses élasticités-prix et dépense totale :

$$\varepsilon = \mathcal{E}(q/r) = \frac{\nu-1}{\omega} \frac{\check{\nu}}{\omega} (\iota + a - \bar{a} \iota) \quad ,$$

$$H = \mathcal{E}(q/p') = \frac{\nu-1}{q} \check{\nu} [\iota a' \frac{\check{\nu}}{\omega} - (I + \check{a}) - y^{-1} (\iota + a - \bar{a} \iota) c' \check{p}] \quad , \text{ et}$$

$$H^* = H + \varepsilon \omega' = \frac{\nu-1}{q} \check{\nu} [\iota a' \frac{\check{\nu}}{\omega} + (\iota + a - \bar{a} \iota) \bar{\omega}' - (I + \check{a})] \quad .$$

Pour des valeurs admissibles des paramètres dans le cadre de la théorie des choix, il vient :

$$i) \quad \varepsilon_i \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i \leq \bar{a} - 1 \quad ,$$

$$\varepsilon_i > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i > \bar{a} - 1 \quad ;$$

$$ii) \quad i \neq j \quad \eta_{ij} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_j \leq \frac{c_j}{e_j} (a_i + 1 - \bar{a}) \quad ,$$

$$\eta_{ij} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_j > \frac{c_j}{e_j} (a_i + 1 - \bar{a}) \quad ;$$

$$iii) \quad i \neq j \quad \eta_{ij}^* \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i + a_j \leq \bar{a} - 1 \quad ,$$

$$\eta_{ij}^* > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i + a_j > \bar{a} - 1 \quad .$$

On retrouve ainsi, quant au signe des élasticités-dépense totale et des élasticités-prix pures croisées, le même type de conclusion que dans le cadre du modèle SIA statique, où toutefois, $\bar{a} = \omega'a$ est remplacé par $\bar{a} = \bar{\omega}'a$. En particulier, les effets de complémentarité-prix pure et les situations à élasticités-dépense totale

(1) Voir Chapitre II, page 32.

négatives sont possibles . Le paradoxe de Giffen n'est pas à exclure a priori (1) .

En ce qui concerne les élasticités-prix apparentes, pour $i \neq j$, on peut remarquer que :

$$i) \quad -1 < a_j < 0 \wedge \epsilon_i c_j > 0 \Rightarrow \eta_{ij} < 0 \quad ;$$

$$ii) \quad a_j > 0 \wedge \epsilon_i c_j < 0 \Rightarrow \eta_{ij} > 0 \quad . \quad .$$

D'après les effets prix apparents, les biens à élasticité-dépense totale positive ($\epsilon_i > 0$) sont toujours complémentaires par rapport aux biens de première nécessité dont le coefficient a_j est négatif, et substituables par rapport aux biens supérieurs dont le coefficient a_j est positif. De façon tout à fait symétrique, les biens à élasticité-dépense totale négative ($\epsilon_i < 0$), seront substituables par rapport aux biens de première nécessité à coefficient a_j positif, et complémentaires par rapport aux biens supérieurs à coefficient a_j négatif.

Etant donné la formulation dynamique (106) , en posant :

$$c_t = c^0 + c^1 q_{t-1} \quad ,$$

on obtient la spécification SIA $\{c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$, qui permet notamment d'explicitier les effets de formation d'habitudes de consommation.

Quant aux élasticités temporelles, on a :

$$\xi(q/q'_{t-1}) = q_t^{-1} (1 - p_t^{-1} \bar{b}_t p'_t) c^1 q'_{t-1} \quad ,$$

(1) Pour $\epsilon_i < 0$, on a :

$$i) \quad c_i < 0 \Rightarrow \eta_{ii} < 0 \quad ;$$

$$ii) \quad c_i > 0 \Rightarrow a_i (\bar{\omega}_i - 1) - 1 \leq \eta_{ii} \leq -\bar{\omega}_i (a_i + 1 - \bar{a}) \quad .$$

avec : $\bar{b}_t = \check{\omega}_t \varepsilon_t = \check{\omega}_t (1 + a - \bar{a}_t 1) \quad , \quad 1' \bar{b}_t = 1 \quad (1) \quad ,$

$$\check{\omega}_t = y_t^{-1} \check{p}_t e_t \quad , \quad \text{et}$$

$$\bar{a}_t = \check{\omega}_t^{-1} a \quad .$$

Ainsi, pour $i \neq j$:

i) $\varepsilon_{it} c_j^1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(q_i/q_{jt-1}) < 0 \quad ;$

ii) $\varepsilon_{it} c_j^1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(q_i/q_{jt-1}) > 0 \quad .$

Au sens temporel, un bien à élasticité-dépense totale positive ($\varepsilon_{it} > 0$) est substituable par rapport aux biens donnant lieu à formation d'habitudes de consommation ($c_j^1 > 0$), et complémentaire par rapport aux biens dont le coefficient c_j^1 est négatif (effacement d'habitudes). Inversement, un bien à élasticité-dépense totale négative ($\varepsilon_{it} < 0$) est complémentaire par rapport aux biens où s'exercent des effets du type formation d'habitudes, et substituable par rapport aux biens tels que $c_j^1 < 0$. Par ailleurs, pour $i = j$, on a :

i) $\varepsilon_{it} < \frac{1}{\omega_{it}} \wedge c_i^1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(q_i/q_{it-1}) > 0 \quad ,$

$\varepsilon_{it} < \frac{1}{\omega_{it}} \wedge c_i^1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(q_i/q_{it-1}) < 0 \quad ;$

ii) $\varepsilon_{it} > \frac{1}{\omega_{it}} \wedge c_i^1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(q_i/q_{it-1}) < 0 \quad ,$

$\varepsilon_{it} > \frac{1}{\omega_{it}} \wedge c_i^1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(q_i/q_{it-1}) > 0 \quad .$

Ces relations complètent la discussion des complémentarités et des substituabilités dans le temps. Les biens inférieurs, à élasticité-

(1) $\bar{b}_t$ désigne ici le vecteur des coefficients budgétaires marginaux :

$$\bar{b}_t = \check{p}_t \frac{\partial q}{\partial r_t} \quad .$$

dépense totale négative sont évidemment tels que $\varepsilon_{it} < \frac{1}{\omega_{it}}$ (cas i)), tandis que la situation ii) ($\varepsilon_{it} > \frac{1}{\omega_{it}}$) implique des biens à élasticité-dépense totale positive ($\varepsilon_{it} > 0$).

En longue période, le niveau des consommations d'équilibre q est défini par un système d'équations implicites et non-linéaires, de la forme :

$$(108) \quad q = c + p^{-1} \bar{\omega} (r - pc') ,$$

avec

$$\bar{\omega}_i = \frac{b_i \left(\frac{y}{p_i}\right)^{a_i}}{\sum_j b_j \left(\frac{y}{p_j}\right)^{a_j}} , \quad i=1,2,\dots,n , \quad \text{et } y = r - pc' ,$$

où l'on a posé $c = c^0 + \bar{c}^1 q$.

On vérifie alors aisément que cet équilibre est localement stable si et seulement si le rayon spectral de la matrice :

$$(I - \bar{b} \bar{c}') \bar{c}^1 \quad (1) ,$$

avec $\bar{b} = \bar{\omega} (I + a - \bar{a} I)$ et $\bar{a} = \bar{\omega}' a$,

est inférieur à l'unité.

Relativement au niveau d'équilibre q défini ci-dessus, la mise en évidence des effets prix et dépense totale de longue période résulte des relations (61) ⁽²⁾ pour :

$$g(q, p, r) = c + p^{-1} \bar{\omega} (r - pc') ,$$

avec $c = c^0 + \bar{c}^1 q$.

Dans ce but, on établit :

(1) Voir chapitre II, page 50, et l'annexe au Chapitre III, pp. 84-86.

(2) Voir Chapitre II, page 47.

$$G = I - \frac{\partial g}{\partial q}, = \overset{v}{p}^{-1} [I - (I - \bar{b} \text{ } \overset{v}{c}')] \overset{v}{c}^1] \overset{v}{p} \quad , \text{ et}$$

$$G^{-1} = \overset{v}{p}^{-1} [I - \bar{\gamma} \text{ } \overset{v}{c}^1] \overset{v}{\xi} \overset{v}{p} \quad ,$$

où l'on pose :

$$\overset{v}{\xi} = (I - \overset{v}{c}^1)^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} = (\overset{v}{\xi}' \bar{b})^{-1} \overset{v}{\xi} \bar{b} \quad .$$

Ainsi :

$$i) \quad \frac{\partial q}{\partial r} = G^{-1} \frac{\partial g}{\partial r} = G^{-1} \overset{v}{p}^{-1} \bar{b} = \overset{v}{p}^{-1} \bar{\gamma} \quad , \quad \text{et}$$

$$\mathcal{C}(q/r) = \overset{v}{\omega}^{-1} \bar{\gamma} \quad ;$$

$$ii) \quad \frac{\partial q}{\partial p} = G^{-1} \frac{\partial g}{\partial p} = G^{-1} \left[\overset{v}{e} [\overset{v}{c} \text{ } a' \text{ } \overset{v}{\omega} - (I + \overset{v}{a})] \overset{v}{p}^{-1} - \overset{v}{p}^{-1} \bar{b} \text{ } \overset{v}{c}' \right] \quad \text{et}$$

$$\mathcal{C}(q/p') = r^{-1} \overset{v}{\omega}^{-1} \left[(I - \bar{\gamma} \text{ } \overset{v}{c}^1) \overset{v}{\xi} \overset{v}{p} \overset{v}{e} [\overset{v}{c} \text{ } a' \text{ } \overset{v}{\omega} - (I + \overset{v}{a})] - \bar{\gamma} \text{ } \overset{v}{c}' \text{ } \overset{v}{p} \right] \quad .$$

On en déduit la matrice des élasticités-prix pures :

$$\mathcal{C}(q/p') + \mathcal{C}(q/r) \text{ } \overset{v}{\omega}' = r^{-1} \overset{v}{\omega}^{-1} \left[(I - \bar{\gamma} \text{ } \overset{v}{c}^1) \overset{v}{\xi} \overset{v}{p} \overset{v}{e} [\overset{v}{c} \bar{b}' + a \text{ } \overset{v}{\omega}' - (I + \overset{v}{a})] \right] \quad .$$

Quant à la compatibilité du système des fonctions de consommation

(108) avec les hypothèses de la théorie des choix, on vérifie qu'une condition nécessaire et suffisante ⁽¹⁾ pour que la matrice :

$$\frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial r} q' = G^{-1} \left[\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial r} q' \right] \quad ,$$

soit symétrique, s'écrit :

$$a_i = \text{constante}, \quad i=1,2,\dots,n \quad ,$$

et conduit donc à un système de fonctions de consommation du type SLDG (103). Dans tous les cas, on peut cependant souligner que

(1) On exclut bien évidemment le cas trivial où $\overset{v}{c}^1 = 0$.

relativement à l'approche duale, il existe un système de prix relatif $\pi^* = r^{*-1} p^*$ associé aux consommations d'équilibre q et solution du problème dual :

$$\begin{cases} \min. & \varphi(\pi) \\ \pi'q = 1 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\text{avec } \varphi(\pi) = \sum_i b_i^* \frac{\left(\frac{1 - \pi' c^*}{\pi_i} \right)^{a_i} - 1}{a_i},$$

$$c^* = \sum \xi c^0, \quad \text{et} \quad b_i^* = b_i (1 - c_i^1)^{a_i}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Par la suite, on envisagera également les fonctions de consommation du type SIA (106) avec les hypothèses suivantes quant aux variables c_t :

$$c_t = \sum \xi^1 q_{t-1} \quad \text{et} \quad c_t = c^0,$$

qui conduisent aux spécifications SIA $\{c_t = \sum \xi^1 q_{t-1}\}$ et SIA $\{c_t = c^0\}$. Il s'agit donc de cas particuliers de la spécification SIA $\{c_t = c^0 + \sum \xi^1 q_{t-1}\}$ étudiée ci-dessus. Notamment, l'hypothèse $c_t = \sum \xi q_{t-1}$ permet d'explicitier les effets d'habitudes de consommation et les complémentarités et substituabilités dans le temps, et présente l'avantage, du point de vue de l'estimation, de nécessiter un nombre moins élevé de paramètres.

La spécification SIA $\{c_t = c^0\}$ constitue quant à elle, un système de fonctions de consommation de type statique dans le cadre de la théorie des choix, qui généralise les modèles SIA, SLD et SLDG. En plus des effets-prix purs de complémentarité ou de substituabilité et de situations à élasticité-dépense totale négative, elle permet de mettre en évidence la notion de consommation obligée et la distinction entre biens de première nécessité et biens supérieurs.

(1) On a évidemment $p^* = \sum \xi^{-1} p$ et $r^* = p^* q$, avec $\pi^* > 0 \Leftrightarrow 1 - c^1 > 0$.

3. Mise en évidence des liens existant entre les différents modèles envisagés

A l'exception des modèles dynamiques d'adaptation aux consommations désirées du type SAD, SAR et SAQ ⁽¹⁾, les différents systèmes de fonctions de consommation envisagés peuvent s'écrire sous la forme :

$$(109) \quad q_t = c_t + p_t^{v-1} b_t y_t ,$$

$$\text{avec} \quad y_t = r_t - p_t' c_t ,$$

et se caractérisent dès lors par les différentes hypothèses portant sur les variables b_t et c_t . Plus précisément, la spécification des coefficients budgétaires marginaux :

$$\omega_t^* = p_t^v \frac{\partial q}{\partial r_t} ,$$

découle des hypothèses faites pour b_t . Aussi, dans le but de comparer les différents systèmes de fonctions de consommation, on remarque que :

i) pour $a_i = a$, $i=1,2,\dots,n$,

$$b_{it} = \frac{b_i \left(\frac{y_t}{p_{it}}\right)^{a_i}}{\sum_j b_j \left(\frac{y_t}{p_{jt}}\right)^{a_j}} \Leftrightarrow b_{it} = \frac{b_i p_{it}^{-a}}{\sum_j b_j p_{jt}^{-a}} ;$$

ii) pour $a = 0$,

$$b_{it} = \frac{b_i p_{it}^{-a}}{\sum_j b_j p_{jt}^{-a}} \Leftrightarrow b_{it} = b_i \text{ ou } b_{it} = b_i^0 ;$$

(1) Voir Chapitre III, point 5 .

iii) pour $b_i^1 = 0$, $i=1,2,\dots,n$,

$$b_{it} = b_i^0 + b_i^1 \Pi(t/t-1) \Leftrightarrow b_{it} = b_i^0 \text{ ou } b_{it} = b_i \text{ , et}$$

$$b_{it} = b_i^0 + b_i^1 (t - t_0) \Leftrightarrow b_{it} = b_i^0 \text{ ou } b_{it} = b_i \text{ .}$$

Quant aux hypothèses sur les variables c_t , on a :

i) pour $\gamma = 0$

$$c_t = \gamma c_{t-1} + \sqrt[k]{q_{t-1}} + c^0 \Leftrightarrow c_t = c^0 + \sqrt[c^1]{q_{t-1}} \text{ ;}$$

ii) pour $c^0 = 0$,

$$c_t = c^0 + \sqrt[c^1]{q_{t-1}} \Leftrightarrow c_t = \sqrt[c^1]{q_{t-1}} \text{ ,}$$

$$c_t = c^0 \Leftrightarrow c_t = 0 \text{ ;}$$

iii) pour $c^1 = 0$.

$$c_t = c^0 + \sqrt[c^1]{q_{t-1}} \Leftrightarrow c_t = c^0 \text{ ou } c_t = c \text{ ,}$$

$$c_t = \sqrt[c^1]{q_{t-1}} \Leftrightarrow c_t = 0 \text{ , et}$$

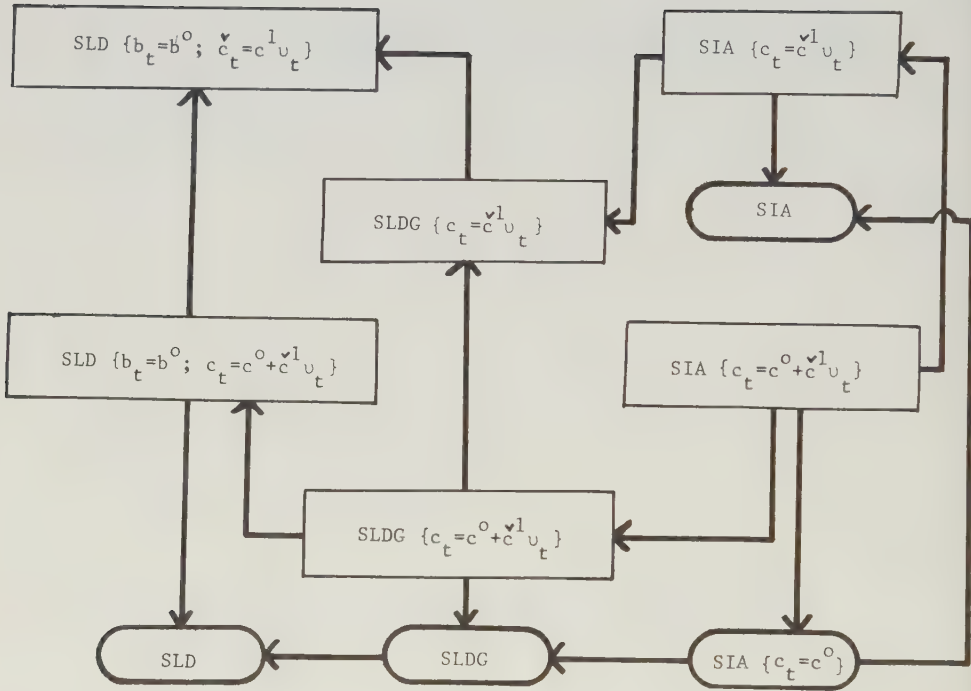
$$c_t = c^0 + \sqrt[c^1]{(t-t_0)} \Leftrightarrow c_t = c^0 \text{ ou } c_t = c \text{ .}$$

D'autre part, le système SLD statique est un cas particulier des modèles SAD pour $D = I$, SAR pour $R = 0$ et SAQ pour $Q = I$.

Compte tenu de l'écriture (109) des fonctions de consommation associée aux hypothèses génériques :

$$c_t = c^0 + \sqrt[c^1]{v_t} \text{ ,}$$

le schéma ci-dessous fait apparaître les principaux liens existant entre les systèmes de fonctions de consommation du type SLD, SLDG et SIA .



Dans ce schéma, la relation :

Le modèle A généralise le modèle B ,

est représentée par une flèche de A vers B. Elle est évidemment transitive ⁽¹⁾.

(1) Pour faciliter la lecture, on n'indique pas les relations qui résultent de la transitivité .

On peut également mettre en évidence les liens existant entre les différentes applications faites à partir du système linéaire de dépenses statique (1).

Spécifications retenues	$b_t = b^0 + b^1(t-t_0)$	$b_t = b^0$ ou $b_t = b$	$b_t = b^0 + b^1 \pi(t/t-1)$	type de formulation
$c_t = c^0 + c^1(t-t_0)$	<pre> graph TD C --> CS C --> SC CS --> S CD --> SD SC --> S S --> DS SD --> DS DC --> DS D --> DS DS --> D SAR --> S SAD --> S SAQ --> S SLDS --> DS </pre>			cinématique
$c_t = c^0$ ou $c_t = c$				statique
$c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}$				dynamique
$c_t = c^1 q_{t-1}$				dynamique
type de formulation	cinématique	statique	dynamique	

(1) Voir Chapitre III.

La figure ci-dessus illustre en particulier, dans le cadre d'un modèle du type SLD, le rôle conjoint des explications de nature statique, cinématique et dynamique.

Les relations explicitées entre les différents modèles retenus suggèrent une méthode de comparaison entre modèles fondée sur un test statistique de l'hypothèse :

$$\theta_A = \theta_B \quad ,$$

où θ_A désigne certains paramètres du modèle A qui, lorsqu'ils sont égaux à θ_B , permettent de particulariser le modèle A au modèle B.

D'autres comparaisons peuvent être envisagées, qui portent notamment sur les systèmes de fonctions de consommation dynamiques dans la forme qu'ils admettent en équilibre de longue période, et leur version statique correspondante.

Chapitre V PROBLEMATIQUE DE L'ESTIMATION DES MODELES ENVISAGES

Partant d'une formulation *théorique* ⁽¹⁾ d'un modèle, l'approche économétrique conduit naturellement à une formulation aléatoire ou stochastique. Plus précisément, il s'agira de définir la *spécification économétrique* des systèmes de fonctions de consommation envisagés, les *méthodes statistiques* utilisées et les *procédures numériques* correspondantes, qui fournissent les estimations des fonctions de consommation.

1. Spécifications économétriques

L'introduction d'éléments stochastiques au niveau d'un modèle théorique donne le plus souvent lieu à des hypothèses qui caractérisent, tout au moins partiellement, la loi de probabilité générique des variables aléatoires considérées. Par exemple, on précisera l'évolution dans le temps de l'espérance mathématique des variables aléatoires, de leur variance et de leurs covariances. Dès lors, il convient de présenter la spécification économétrique d'un modèle d'après la distinction entre modèles statiques, cinématiques et dynamiques. Cette distinction se fonde en effet sur la notion de structure, de sa stabilité ou de son évolution, que l'on doit étendre à la partie aléatoire du modèle.

1.1 Le cas des modèles statiques

La spécification couramment adoptée ⁽²⁾ dans le cas des modèles statiques de la consommation semi-agrégée consiste à introduire un vecteur aléatoire d'erreurs additives au niveau des *fonctions de dépense* :

(1) Les modèles que l'on a présenté constituent des explications théoriques de nature non-aléatoire. Cf. [29], pp. 59-60.

(2) Voir par exemple [6] et [47], chapitre VII.

$$(110) \quad d_t = f(x_t; \beta) + u_t, \quad t=1,2,\dots,T,$$

$$\text{avec} \quad d_t = \check{p}_t' q_t \quad \text{et} \quad f(x_t; \beta) = \check{p}_t' q(x_t; \beta).$$

Rappelons que, pour la période t , le vecteur des variables endogènes d_t représente la ventilation en n rubriques de consommation de la dépense totale r_t , x_t est un vecteur de variables exogènes, et u_t un résidu aléatoire; β désigne un vecteur générique de m paramètres indépendants (1).

Le caractère *statique* de la formulation stochastique envisagée résulte des hypothèses suivantes (2) :

$$(111) \quad E(u_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(u_t u_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega_u, \quad t, \tau=1,2,\dots,T.$$

Les vecteurs aléatoires u_t , $t=1,2,\dots,T$, sont nuls en espérance mathématique, homoscédastiques et satisfont à l'hypothèse d'absence d'autocorrélation.

Par additivité :

$$1' d_t = r_t \quad \text{et} \quad 1' f(x_t; \beta) = r_t \Rightarrow 1' u_t = 0,$$

et la matrice Ω_u est singulière ($1' \Omega_u = 0'$). On admettra par la suite que cette matrice est semi-définie positive, de rang $n-1$.

On déduit des relations (110) et (111) la spécification économétrique des *fonctions de consommation en volume* :

$$(112) \quad \begin{cases} q_t = q(x_t; \beta) + v_t, \\ E(v_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(v_t v_\tau') = \delta_{t\tau} \check{p}_t^{\nu-1} \Omega_u \check{p}_t^{\nu-1}, \quad t, \tau=1,2,\dots,T, \end{cases}$$

(1) Pour un modèle dont la partie certaine est $f^*(x; \beta^*)$ avec p contraintes analytiques indépendantes sur le vecteur β^* à $m+p$ composantes, on se ramènera au cas envisagé en éliminant p paramètres.

(2) E désigne l'opérateur *espérance mathématique*.

avec $v_t = p_t^{-1} u_t$.

Bien qu'il y ait toujours absence d'autocorrélation des erreurs résiduelles v_t , l'homoscédasticité n'est pas conservée. La relation :

$$E(v_t v_t') = p_t^{-1} \Omega_u p_t^{-1} ,$$

traduit, quant à la partie aléatoire du modèle, l'importance que la cellule de consommation accorde au niveau des prix ⁽¹⁾.

On peut remarquer que pour les fonctions de consommation en volume, une formulation aléatoire de type statique exigerait :

$$E(v_t v_t') = \Omega_v , \quad t=1,2,\dots,T ,$$

ce qui est incompatible avec l'additivité :

$$p_t' v_t = 0 \rightarrow p_t' \Omega_v = 0 , \quad t=1,2,\dots,T .$$

Comme on l'a parfois proposé ⁽²⁾, il est possible de définir la spécification économétrique d'un système statique de fonctions *coefficients budgétaires* :

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_t = r_t^{-1} f(x_t; \beta) + w_t , \\ E(w_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(w_t w_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega_w , \quad t, \tau = 1, 2, \dots, T , \end{array} \right.$$

avec $w_t = r_t^{-1} u_t$, $u' w_t = 0$ et $u' \Omega_w = 0$.

Dans ce cas :

$$E(u_t u_t') = r_t^2 \Omega_w \quad \text{et} \quad E(v_t v_t') = r_t^2 p_t^{-1} \Omega_w p_t^{-1} ;$$

(1) On peut y voir (cf. [5], p. 456) la présence d'"illusion monétaire" pour les fonctions de consommation (112).

(2) Cf. [5], [6] .

l'utilisation d'une telle spécification semble plus appropriée dans une étude portant sur des données obtenues par coupes transversales (enquêtes sur les budgets familiaux), plutôt que dans le cadre de séries chronologiques de la consommation semi-agrégée.

1.2 Problèmes posés par la spécification économétrique des modèles cinématiques et dynamiques

Les formulations aléatoires de type statique se fondent sur l'absence d'autocorrélation dans le temps des erreurs résiduelles u_t et sur la stabilité même de leurs matrices de variances et covariances, que traduit l'hypothèse :

$$E(u_t u'_\tau) = \delta_{t\tau} \Omega_u, \quad t, \tau = 1, 2, \dots, T.$$

Dès lors, il apparaît judicieux, par référence au modèle théorique, de considérer une spécification économétrique qui corresponde, quant à la partie aléatoire du modèle, à une formulation *cinématique* ou *dynamique*.

Pour les fonctions de dépense (110) :

$$d_t = f(x_t; \beta) + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

on posera généralement :

$$E(u_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(u_t u'_\tau) = \Gamma_{t\tau}, \quad t, \tau = 1, 2, \dots, T$$

où, par additivité : $u' \Gamma_{t\tau} = 0'$.

Comme la matrice :

$$E(uu') = \|E(u_t u'_\tau)\| \quad t, \tau = 1, 2, \dots, T,$$

avec $u = \|u_t\| \quad t = 1, 2, \dots, T,$

est semi-définie positive, on aura :

$$\Gamma_{t\tau} = \Gamma'_{\tau t},$$

et l'on supposera que les matrices Γ_{tt} , $t=1,2,\dots,T$, sont semi-définies positives, de rang $n-1$.

Les formulations aléatoires de type *cinématique* résulteraient ⁽¹⁾ d'hypothèses de nature descriptive sur l'évolution des matrices $\Gamma_{t\tau}$, de la forme :

$$\Gamma_{t\tau} = \Gamma(t, \tau; u) ,$$

u étant un vecteur de paramètres.

Quant aux formulations aléatoires de type *dynamique*, elles résultent d'hypothèses portant sur les enchaînements temporels entre les variables aléatoires u_t .

Une première simplification que l'on retient, revient à considérer la suite des vecteurs u_t comme issue d'un *processus stochastique stationnaire au second ordre* ⁽²⁾.

On peut alors poser : pour $\theta = \tau - t$:

$$\Gamma_{\theta} = \Gamma_{t\tau} , \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\theta} = \Gamma'_{-\theta} ,$$

ce qui conduit à admettre, en particulier l'hypothèse d'homoscédasticité ⁽³⁾ :

$$\forall t , \quad E(u_t u_t') = \Gamma_0 .$$

Par exemple, le processus autorégressif de premier ordre ⁽⁴⁾ :

(1) Par la suite on ne retiendra pas ce type de formulation.

(2) Cf. [29] , Chapitre 11. On admettra également, en vue de l'estimation, que ce processus est ergodique.

(3) On remarque qu'au niveau des fonctions de consommation en volume [112], on a :

$$E(v_t v_t') = p_t^{-1} \Gamma_0 p_t^{-1} ,$$

et le processus aléatoire n'est plus stationnaire.

(4) Pour un traitement systématique de cette question, Cf. [9] .

$$(114) \quad u_t = R u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

avec

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega_\varepsilon,$$

conduit aux relations suivantes :

$$\Gamma_\theta = \Gamma_0 R'^\theta, \quad \text{et}$$

$$\Gamma_0 = \sum_{\tau=0}^{\infty} R^\tau \Omega_\varepsilon R'^\tau.$$

Cela suppose évidemment que le rayon spectral de la matrice R est inférieur à l'unité. Par ailleurs, l'additivité, qui implique :

$$u' \varepsilon_t = 0 \quad \text{et} \quad u' R = \rho u',$$

a pour conséquence que la matrice R n'est identifiable que pour une valeur donnée de ρ .

Compte tenu des relations (110) et (114), on peut écrire le système des fonctions de dépense sous la forme :

$$(115) \quad d_t - f(x_t; \beta) = R [d_{t-1} - f(x_{t-1}; \beta)] + \varepsilon_t,$$

c'est-à-dire de manière analogue au système de fonctions de consommation (54) ⁽¹⁾ pour lequel on envisagerait une formulation aléatoire de type statique :

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega_\varepsilon.$$

En particulier, si l'on choisit pour $f(x_t; \beta)$ les fonctions du système linéaire de dépenses statique, les fonctions de consommation (115) coïncident avec une spécification économétrique statique du modèle dynamique SAR (97) ⁽²⁾.

D'autres spécifications économétriques peuvent évidemment être envisagées.

(1) Voir Chapitre II, page 42. Dans ce cas, $f(x_t; \beta)$ exprime le niveau des dépenses désirées.

(2) Voir Chapitre III, page 80.

S'agissant enfin de la distinction, d'après la nature des explications recherchées, entre modèle statique, cinématique et dynamique, on peut faire les remarques suivantes.

Les modèles *statiques* proprement dits résultent de l'association, au niveau de la spécification économétrique, d'un modèle théorique statique à une formulation aléatoire statique.

D'un point de vue empirique, il apparaît en général judicieux, dans le cadre d'une étude basée sur des séries chronologiques de la consommation semi-agrégée, d'associer un modèle théorique statique à une formulation aléatoire cinématique ou dynamique, soit encore un modèle théorique cinématique ou dynamique à une formulation aléatoire statique ⁽¹⁾.

2. Méthodes d'estimation

On considérera tout d'abord les modèles théoriques associés à une formulation aléatoire de type statique, dont la spécification économétrique peut s'écrire :

$$(116) \quad \begin{cases} d_t = f(x_t; \beta) + u_t \\ E(u_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(u_t u_{t'}) = \delta_{tt'} \Omega, \quad t, t' = 1, 2, \dots, T \end{cases},$$

x_t étant un vecteur de variables prédéterminées et β un vecteur de paramètres. En effet, les méthodes d'estimation restent les mêmes pour les modèles dynamiques de cette forme, où x_t comprend des variables endogènes retardées (modèles autorégressifs). Quant aux propriétés statistiques des méthodes d'estimation, s'agissant de modèles non-linéaires, il sera d'autant plus nécessaire de recourir à des expériences de simulation dès que l'on envisage des modèles autorégressifs ⁽²⁾.

-
- (1) L'association d'une formulation aléatoire dynamique à un modèle théorique dynamique donne le plus souvent lieu à des difficultés au niveau du calcul des estimations, en raison notamment du nombre de paramètres nécessités par des formulations de ce type.
- (2) Les propriétés statistiques sont alors généralement moins fortes. Voir par exemple [29], Chapitre 14. Voir également ci-après Chapitre IV, paragraphe 4.2.

On fera également quelques remarques sur l'estimation de certains modèles dynamiques particuliers, notamment les modèles SAR, SAD, SAQ et SLDS.

2.1 Estimateurs envisagés

On a retenu pour β les estimateurs des *moindres carrés simples* et les estimateurs du *maximum de vraisemblance*.

Comme on l'a vu, l'additivité du modèle (116) implique que une matrice Ω singulière, que l'on suppose de rang $n-1$, semi-définie positive.

Il a été établi ⁽¹⁾ que l'estimation des paramètres d'un système de fonctions additives de la forme (116) peut être résolue en éliminant l'une quelconque des fonctions du système complet et que cette procédure ne dépend pas du choix de la fonction que l'on élimine.

Dès lors, on considère la spécification économétrique suivante des $n-1$ premières fonctions de dépense :

$$(117) \quad \begin{cases} \bar{d}_t = \bar{f}(x_t; \beta) + \bar{u}_t, \\ E(\bar{u}_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\bar{u}_t \bar{u}_\tau') = \delta_{t\tau} \Lambda, \quad t, \tau=1, 2, \dots, T, \end{cases}$$

qui se déduit du système (116) à l'aide des relations :

$$(118) \quad \begin{cases} \bar{d}_t = P d_t, \bar{f}(x_t; \beta) = P f(x_t; \beta), \\ \bar{u}_t = P u_t \quad \text{et} \quad \Lambda = P \Omega P', \end{cases}$$

avec
$$P = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Cf. [47], Chapitre VII, paragraphe 2.

La matrice Λ , d'ordre $n-1$, est définie positive et l'on admettra également l'hypothèse de normalité pour $\bar{u}_t$ lorsque l'on envisagera les estimateurs du maximum de vraisemblance.

En posant :

$$(119) \quad e_n = \|\delta_{in}\| \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{et} \quad \bar{P} = P' - e_n e_n',$$

il résulte de l'additivité et des relations (117) la spécification économétrique du système complet (116) :

$$(120) \quad \begin{cases} d_t = \bar{P} \bar{d}_t + e_n r_t, & f(x_t; \beta) = \bar{P} \bar{f}(x_t; \beta) + e_n r_t, \\ u_t = \bar{P} \bar{u}_t & \text{et} \quad \Omega = \bar{P} \Lambda \bar{P}' \end{cases}$$

L'estimateur $\hat{\beta}$ des *moindres carrés simples* pour le système complet des n fonctions de dépense minimise, par définition, l'expression :

$$S(\beta|d,x) = \sum_t [d_t - f(x_t; \beta)]' [d_t - f(x_t; \beta)],$$

soit encore, pour le système (117) des $n-1$ fonctions de dépense :

$$S(\beta|\bar{d},\bar{x}) = \sum_t [\bar{d}_t - \bar{f}(x_t; \beta)]' \bar{P}' \bar{P} [\bar{d}_t - \bar{f}(x_t; \beta)],$$

$$\text{avec} \quad \bar{P}' \bar{P} = I + e_n e_n'.$$

Pour les modèles statiques tout au moins, on montre⁽¹⁾, sous certaines conditions de régularité que dans la classe des estimateurs à *S-distance minimale*, $\hat{\beta}$ est le plus efficace si la matrice Λ est de la forme :

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{n} (n I - e_n e_n'),$$

ce qui implique pour Ω une matrice de même forme :

(1) Cf. [29], Chapitre 9, paragraphe 2, et [47], Chapitre VII, paragraphe 3. Voir également [6].

$$\Omega = \begin{vmatrix} \Lambda & -\Lambda \iota \\ -\iota' \Lambda & \iota' \Lambda \iota \end{vmatrix},$$

qui tend vers $\sigma^2 I$ pour n grand. On montre également que des estimateurs convergents pour Λ et pour la matrice $\Sigma_{\hat{\beta}}$ des variances et covariances asymptotiques de $\hat{\beta}$ sont donnés, respectivement, par les expressions suivantes :

$$(121) \quad \hat{\Lambda} = \frac{1}{T} \sum_t [\bar{d}_t - \bar{f}(x_t; \hat{\beta})] [\bar{d}_t - \bar{f}(x_t; \hat{\beta})]',$$

$$(122) \quad \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \left[(X'X)^{-1} (X' \Theta X) (X'X)^{-1} \right]_{\substack{\beta=\hat{\beta}, \\ \Lambda=\hat{\Lambda}}},$$

$$\text{avec} \quad X = \left\| \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=1,2,\dots,T} \quad \text{et} \quad \Theta = I \otimes \Omega \quad (1).$$

L'estimateur $\hat{\beta}$ du *maximum de vraisemblance* maximise le logarithme de la vraisemblance concentrée (2) :

$$L^{**}(\beta/\bar{d}, x) = \max_{\Lambda} L^*(\beta, \Lambda/\bar{d}, x),$$

où $L^*(\beta, \Lambda/\bar{d}, x)$ est le logarithme de la vraisemblance de l'échantillon $\bar{d} = \|\bar{d}_t\|$, $t=1,2,\dots,T$. Les $\bar{u}_t$ étant supposés normaux, la vraisemblance de l'échantillon $\bar{d}$ découle de la densité du vecteur aléatoire $\bar{u} = \|\bar{u}_t\|$ $t=1,2,\dots,T$, grâce au changement de variables $\bar{d}_t = f(x_t; \beta) + \bar{u}_t$ dont le jacobien est unitaire, x_t étant prédéterminé. On vérifie aisément que :

$$L^{**}(\beta/\bar{d}, x) = \text{cste} - \frac{T}{2} \log |\Lambda^*(\beta)| \quad (3),$$

(1) $\otimes$ désigne le produit de Kronecker.

(2) Voir par exemple [12], Chapitre 3.

(3) $|\Lambda^*(\beta)|$ désigne le déterminant de la matrice $\Lambda^*(\beta)$.

$$\text{où} \quad \Lambda^*(\beta) = \frac{1}{T} \sum_t [\bar{d}_t - \bar{f}(x_t; \beta)] [\bar{d}_t - \bar{f}(x_t; \beta)]',$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance pour Λ est ainsi défini par :

$$(123) \quad \tilde{\Lambda} = \Lambda^*(\tilde{\beta}),$$

tandis qu'un estimateur pour la matrice $\tilde{\Sigma}_{\beta}$ des variances et covariances asymptotiques de $\tilde{\beta}$ peut s'écrire ⁽¹⁾ :

$$(124) \quad \tilde{\Sigma}_{\beta} = \left[(\bar{X}' \Phi^{-1} \bar{X})^{-1} \right]_{\beta=\tilde{\beta}, \Lambda=\tilde{\Lambda}},$$

$$\text{avec} \quad \bar{X} = \left\| \frac{\partial \bar{f}(x_t; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=1,2,\dots,T} \quad \text{et} \quad \Phi = I \otimes \Lambda.$$

Dans une approche *bayésienne*, on n'établit pas ⁽²⁾, en général, de distinctions entre les modèles statiques et les modèles autorégressifs qui s'écrivent sous la forme (116). Par ailleurs, L. Solari ⁽³⁾ a montré que les estimateurs bayésiens $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\Lambda}$ qui maximisent la probabilité a posteriori $p(\beta, \Lambda^{-1} | \bar{d}, x)$ des paramètres, pour les hypothèses non informatives :

$$\begin{aligned} p(\beta) &\propto k \quad \text{et} \quad p(\Lambda^{-1}) \propto |\Lambda^{-1}|^{-\frac{n}{2}}, \\ \text{avec} \quad p(\beta, \Lambda^{-1}) &= p(\beta) \cdot p(\Lambda^{-1}), \end{aligned}$$

sont donnés par :

$$\tilde{\beta} = \beta \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda} = \frac{T}{T-n} \tilde{\Lambda},$$

alors que la loi a posteriori de β s'écrit :

$$p(\beta | \bar{d}, x) \propto |\Lambda^*(\beta)|^{-\frac{T}{2}}.$$

(1) Cf. [6] et [47], Chapitre VII, paragraphe 4. L'existence de la matrice $\tilde{\Lambda}^{-1}$ suppose notamment que $T > n-1$.

(2) Cf. [29], p. 565, note 1.

(3) Cf. [47], Chapitre VII, paragraphe 5.

2.2 Procédures numériques

La définition des estimateurs envisagés ci-dessus doit être complétée par une description des procédures numériques utilisées pour le calcul des estimations.

On observe que cet aspect numérique se résume dans la recherche du maximum par rapport à β d'une fonction critère $F(\beta \mid \bar{d}, x)$, pour des valeurs données des observations $\bar{d}$ et x .

En supposant l'existence d'un maximum régulier pour F , on est donc amené à résoudre par rapport à β le système des conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 \quad .$$

Dans ce but, on utilise la méthode itérative du *gradient généralisé* (1).

En partant d'une solution approchée β^0 , cette méthode conduit à calculer une nouvelle approximation :

$$\beta^1 = \beta^0 + \alpha^1 \Delta \beta^1 \quad ,$$

telle que :

$$\Delta \beta^1 = G^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta^0} \quad ,$$

où G est une matrice définie positive, α^1 étant la valeur de α qui maximise :

$$F(\beta^0 + \alpha \Delta \beta^1 \mid \bar{d}, x) \quad .$$

On se ramène ainsi à un problème de recherche de maximum pour une fonction d'une seule variable. Dès lors, étant donné un intervalle $[\bar{\alpha}; \bar{\alpha}]$ contenant α^1 , ce problème peut être résolu à l'aide d'un polynôme d'interpolation.

(1) Cf. [6] et [47], Chapitre VII, paragraphe 6.

Pour l'estimateur $\hat{\beta}$ des moindres carrés simples, on a la fonction critère :

$$F(\beta | \bar{d}, x) = - \frac{1}{2} S(\beta | \bar{d}, x) .$$

On retient dans ce cas la matrice :

$$G = \left[X'X \right]_{\beta=\beta^0} ;$$

$\Delta \beta^1$ équivaut alors à l'estimateur des moindres carrés simples pour $\Delta \beta$ dans le modèle complet (116), linéaire au point $\beta = \beta^0$. Il s'agit également de l'estimateur à S-distance minimale pour le système des n-1 fonctions de dépense (117) linéarisé au point $\beta = \beta^0$,

avec :

$$S = \sigma^{-2} \bar{P}' \bar{P} = \sigma^{-2} (I + \iota \iota')$$

Quant à l'estimateur $\tilde{\beta}$ du maximum de vraisemblance, étant donné la fonction critère :

$$F(\beta | \bar{d}, x) = L^{**}(\beta | \bar{d}, x) ,$$

on considère la matrice :

$$G = \left[\bar{X}' \Phi^{-1} \bar{X} \right]_{\beta=\beta^0, \Lambda=\Lambda^*(\beta^0)} .$$

$\Delta \beta^1$ s'interprète ⁽¹⁾ dans ce cas comme l'estimateur à $\Lambda^{*-1}(\beta^0)$ -distance minimale pour le système des n-1 premières fonctions de dépense linéarisé au point $\beta = \beta^0$.

On considérera aussi la matrice ⁽²⁾ :

$$G = \left[- \frac{\partial^2 L^{**}}{\partial \beta \partial \beta'} \right]_{\beta=\beta^0} ,$$

ce qui suppose $L^{**}(\beta | \bar{d}, x)$ concave en β^0 .

(1) On vérifie en effet que :

$$\frac{\partial L^{**}}{\partial \beta} = \bar{X}' \Phi^{-1} (\bar{d} - \bar{f}) ,$$

avec $\bar{f} = \| \bar{f}(x_t; \beta) \| \quad t=1,2,\dots,T$.

(2) L'expression d'un élément générique de cette matrice pour un système de fonctions de dépense additives figure dans [6] .

D'un point de vue empirique, l'utilisation, au signe près, de la matrice des dérivées secondes de la fonction critère L^{**} comme matrice directionnelle G s'avère particulièrement efficace lorsque l'on se trouve dans un voisinage du point de convergence $(1) \tilde{\beta} = \beta^{(K)}$. Par contre, les problèmes soulevés par le calcul numérique d'une telle matrice restreignent en général son application à des situations relativement simples (2) .

La matrice $\bar{X}' \Phi^{-1} \bar{X}$ présente l'avantage d'être toujours définie positive, est de construction plus aisée, mais nécessite un nombre d'itérations parfois beaucoup plus élevé quant à la convergence de la procédure itérative.

Enfin, le problème du choix de valeurs initiales satisfaisantes est aussi important. En effet, de ce choix découle principalement l'efficacité des procédures numériques d'estimation envisagées. La démarche proposée consiste, en partant d'un modèle très simplifié, à envisager des modèles plus généraux par étapes successives d'estimation.

- (1) On considère que le processus converge à la K -ème itération lorsque pour :

$$F(\beta^{(K)} | \bar{d}; x) = \max_{\alpha} F(\beta^{(K-1)} + \alpha \Delta \beta^{(K)} | \bar{d}; x) ,$$

$$\text{avec } \beta^{(K)} = \beta^{(K-1)} + \alpha^{(K)} \Delta \beta^{(K)} \text{ et } \Delta \beta^{(K)} = \left[G^{-1} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta^{(K-1)}} ,$$

les conditions suivantes sont remplies :

$$|F(\beta^{(K)} | \bar{d}; x) - F(\beta^{(K-1)} | \bar{d}; x)| \leq \epsilon_F ,$$

$$|\Delta \beta_i^{(K)}| \leq \epsilon_i, i=1,2,\dots,m \text{ et } |\alpha^{(K)} - 1| \leq \epsilon_{\alpha} ,$$

les ϵ étant des nombres positifs, fixés à l'avance.

- (2) On a retenu cette matrice pour les systèmes de fonctions de consommation du type SLD. Pour ces modèles, on trouvera dans [7] une illustration des procédures numériques envisagées.

2.3 Cas particuliers de certains modèles dynamiques

Les méthodes décrites aux paragraphes 2.1 et 2.2 ci-dessus ont été retenues pour l'estimation des modèles statiques, cinématiques et dynamiques du type SLD, SLDG et SIA qui ont été présentés aux Chapitres III et IV.

C'est également ces méthodes que l'on se propose d'appliquer à l'estimation du modèle SLDS.

Concernant ce dernier modèle, la méthode d'estimation préconisée par Houthakker et Taylor ⁽¹⁾ ne nous a pas paru satisfaisante. Houthakker et Taylor introduisent en effet un vecteur de résidus aléatoires de manière additive sur les fonctions de consommation en volume, et envisagent à ce niveau les estimateurs des moindres carrés simples. Comme on l'a vu, une formulation aléatoire de type statique (111) portant sur les fonctions de consommation en volume, qui justifierait l'utilisation de la méthode des moindres carrés simples, est incompatible avec l'additivité des dépenses. Par ailleurs, on ne saurait estimer, de façon cohérente, la matrice des variances et covariances (asymptotiques) de ces estimateurs ⁽²⁾ sans expliciter les hypothèses quant aux matrices des variances et covariances des résidus aléatoires.

Considérons la spécification économétrique suivante du système SLDS [82] :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t = f(x_t; \beta) + u_t \quad , \quad t=2,3,\dots,T \\ E(u_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(u_t u'_\tau) = \delta_{t\tau} \sigma^2 \quad , \quad t,\tau=2,3,\dots,T \end{array} \right.$$

où le système de fonctions $f(x_t; \beta)$ est donné par :

$$(125) \left\{ \begin{array}{l} f^*(x_t; \beta) = \check{p}_t^0 c^0 + \check{p}_t^1 \check{q}_{t-1}^1 c^1 + \mu_t^0 b^0 + \mu_{t-1}^1 \check{p}_t^1 \check{p}_{t-1}^{-1} b^1 \\ \mu' f^*(x_t; \beta) = r_t \end{array} \right.$$

(1) Cf. [22], Chapitre 5, pp. 201-204. Voir également [36], [55].

(2) Cf. [22], Chapitre 5, pp. 206-226.

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad x_t' &= \left\| p_t' \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} p_{t-1}' \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} q_{t-1}' \right\| , \\ \beta' &= \left\| \bar{b}^0 \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} b^1 \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} c^0 \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} c^1 \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \mu_1 \right\| , \quad \text{et} \\ b^0' &= \left\| \bar{b}^0 \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} b_n^0 \right\| , \quad b_n^0 = 1 - \iota' \bar{b}^0 . \end{aligned}$$

La contrainte d'additivité :

$$\iota' f^*(x_t; \beta) = r_t ,$$

peut s'écrire :

$$(126) \quad \mu_t = r_t - \mu_{t-1} p_t' \check{p}_{t-1}^{-1} b^1 - p_t' c^0 - p_t' \check{q}_{t-1} c^1 ,$$

relation de récurrence qui définit la suite des variables μ_t , $t=2,3,\dots,T$, μ_1 étant un paramètre.

En vue du calcul des estimations des moindres carrés simples et du maximum de vraisemblance, il convient d'établir les éléments de la matrice :

$$X = \left\| \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=2,3,\dots,T} \quad (1) .$$

A partir des relations (125) , en posant :

$$z_t = \bar{z}_t^{-1} \check{p}_t \check{p}_{t-1}^{-1} b^1 , \quad \bar{z}_t = p_t' \check{p}_{t-1}^{-1} b^1 ,$$

$$\bar{p}' = \left\| I_{n-1} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} - \iota \right\| \quad \text{et} \quad f_t^* = f^*(x_t; \beta) ,$$

(1) Connaissant $X = \| X_t \|$ $t=2,3,\dots,T$, on en déduit immédiatement

$$\bar{X} = \| \bar{X}_t \| \quad t=2,3,\dots,T, \quad \text{avec} \quad \bar{X}_t = P X_t , \quad P = \left\| I_{n-1} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

on vérifie que l'on a :

$$\frac{\partial f_t^*}{\partial b^0} = \mu_t \bar{p} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_t^*}{\partial b^1} = (I - z_t \iota') \check{p}_t \check{p}_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} + (b^0 - z_t) \frac{\partial \mu_t}{\partial b^1} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_t^*}{\partial c^0} = (I - z_t \iota') \check{p}_t + (b^0 - z_t) \frac{\partial \mu_t}{\partial c^0} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_t^*}{\partial c^1} = (I - z_t \iota') \check{p}_t \check{q}_{t-1} + (b^0 - z_t) \frac{\partial \mu_t}{\partial c^1} \quad , \text{ et}$$

$$\frac{\partial f_t^*}{\partial \mu_1} = (b^0 - z_t) \frac{\partial \mu_t}{\partial \mu_1} \quad .$$

D'autre part, l'expression (126) donne lieu aux relations de récurrence suivantes qui définissent les dérivées partielles de μ_t :

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial \mu_1} = - \bar{z}_t \frac{\partial \mu_{t-1}}{\partial \mu_1} \quad , \quad \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_1} = 1 \right) \quad ,$$

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial b^1} = - \bar{z}_t \frac{\partial \mu_{t-1}}{\partial b^1} - p_t' \check{p}_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} \quad , \quad \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial b^1} = 0 \right) \quad ,$$

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial c^0} = - \bar{z}_t \frac{\partial \mu_{t-1}}{\partial c^0} - p_t' \quad , \quad \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial c^0} = 0 \right) \quad , \quad \text{ et}$$

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial c^1} = - \bar{z}_t \frac{\partial \mu_{t-1}}{\partial c^1} - p_t' \check{q}_{t-1} \quad , \quad \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial c^1} = 0 \right) \quad .$$

On pourra ainsi envisager le calcul des estimations des moindres carrés simples et du maximum de vraisemblance des paramètres du système SLDS d'après les procédures numériques décrites au point 2.1 ci-dessus.

S'agissant de la problématique de l'estimation d'un système de fonctions de consommation dynamique du type SAR, qui s'écrit sous la forme (115), on considère la spécification économétrique :

$$(127) \begin{cases} d_t = g(x_t^*; R, \beta) + \varepsilon_t \\ E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega_\varepsilon, \quad t, \tau=2, 3, \dots, T \end{cases},$$

où l'on pose :

$$g(x_t^*; R, \beta) = f(x_t; \beta) + R [d_{t-1} - f(x_{t-1}; \beta)]$$

On en déduit la spécification économétrique des n-1 premières fonctions de dépense :

$$(128) \begin{cases} \bar{d}_t = \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta) + \bar{\varepsilon}_t \\ E(\bar{\varepsilon}_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\bar{\varepsilon}_t \bar{\varepsilon}_\tau') = \delta_{t\tau} \Lambda_\varepsilon, \quad t, \tau=2, 3, \dots, T \end{cases},$$

$$\text{avec} \quad \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta) = \bar{f}(x_t; \beta) + \bar{R} [\bar{d}_{t-1} - \bar{f}(x_{t-1}; \beta)]$$

$$\bar{R} = P R \bar{P}, \quad P = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = P' - e_n e_n'$$

la matrice $\Lambda_\varepsilon = P \Omega_\varepsilon P'$, d'ordre n-1, étant définie positive.

Dans le cas où la spécification économétrie (127) résulte de l'association d'une formulation théorique statique avec une formulation aléatoire dynamique :

$$\begin{aligned} d_t &= f(x_t; \beta) + u_t \\ u_t &= R u_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

où, par additivité :

$$1' u_t = 0, \quad 1' R = \rho 1' \quad \text{et} \quad 1' \varepsilon_t = 0,$$

on montre (1) que le processus aléatoire dégénéré $\{u_t\}$ peut être défini de manière unique par un processus non dégénéré, obtenu en supprimant l'une quelconque des composantes du vecteur u_t , complété par additivité et $u_t = 0$. Dès lors, on peut envisager le processus aléatoire :

$$\bar{u}_t = P u_t = \bar{R} \bar{u}_{t-1} + \bar{\varepsilon}_t ,$$

qui donne lieu à la spécification économétrique (128), et pour lequel on a (2) :

$$E(\bar{u}_t \bar{u}_t') = \bar{\Gamma}_0 = \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{R}^{\tau} \Lambda_{\varepsilon} \bar{R}'^{\tau} ,$$

$$E(\bar{u}_t \bar{u}_{t+\theta}') = \bar{\Gamma}_{\theta} = \bar{\Gamma}_0 \bar{R}'^{\theta} , \quad \text{avec}$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta} = \bar{P} \bar{\Gamma}_0 \bar{P}' , \quad \theta=0,1,2,\dots$$

Les estimateurs des moindres carrés simples pour β et $\bar{R}$ sont définis par le problème :

$$\min_{\beta, \bar{R}} S(\beta, \bar{R} \mid \bar{d}, x^*) ,$$

avec :

$$S(\beta, \bar{R} \mid \bar{d}, x^*) = \sum_t [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta)]' \bar{P}' \bar{P} [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta)] .$$

On vérifie que la condition du premier ordre pour $\bar{R}$, $\frac{\partial S}{\partial \bar{R}} = 0$, s'écrit :

(1) Cf. [9].

(2) Cela suppose que le rayon spectral de la matrice $\bar{R}$ est inférieur à l'unité. On montre que les valeurs propres de la matrice $\bar{R}$ sont celles de la matrice R différentes de ρ . Cf. [9].

$$(129) \quad \bar{R}^*(\beta) = \left[\sum_t (\bar{d}_t - \bar{f}_t) (\bar{d}_{t-1} - \bar{f}_{t-1})' \right] \left[\sum_t (\bar{d}_{t-1} - \bar{f}_{t-1}) (\bar{d}_{t-1} - \bar{f}_{t-1})' \right]^{-1},$$

$$\text{où } \bar{f}_t = \bar{f}(x_t; \beta).$$

Quant aux estimateurs du maximum de vraisemblance, en admettant la normalité des vecteurs aléatoires $\bar{\epsilon}_t$, on est conduit à maximiser par rapport à β , $\bar{R}$ et Λ_ϵ^{-1} le logarithme de la vraisemblance de l'échantillon $\bar{d}$:

$$L^* = L^*(\beta, \bar{R}, \Lambda_\epsilon^{-1} \mid \bar{d}, x^*)$$

On a en particulier :

$$\frac{\partial L^*}{\partial \Lambda_\epsilon^{-1}} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_\epsilon^*(\beta, \bar{R}) = \frac{1}{T-1} \sum_t [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta)] [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta)]',$$

(130)

$$\frac{\partial L^*}{\partial \bar{R}} = 0 \Leftrightarrow \bar{R} = \bar{R}^*(\beta),$$

$\bar{R}^*(\beta)$ étant donnée par (129).

Ainsi, grâce aux relations (129) et (130), les procédures numériques rattachées aux méthodes d'estimation ci-dessus se résument au problème de la recherche du maximum d'une fonction critère $F(\beta \mid \bar{d}, x)$ par rapport à β ⁽²⁾. Cependant, eu égard au nombre de paramètres intervenant dans

(1) Cela suppose $T \geq n-1$, la matrice $\bar{R}$ étant régulière.

(2) Dans le premier cas, on aura :

$$F(\beta \mid \bar{d}, x) = -\frac{1}{2} S(\beta, \bar{R}^*(\beta) \mid \bar{d}, x),$$

et dans le second :

$$F(\beta \mid \bar{d}, x) = L^*(\beta, \bar{R}^*(\beta), \Lambda_\epsilon^*(\beta, \bar{R}^*(\beta)) \mid \bar{d}, x).$$

la définition des fonctions $\bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{R})$, on ne pourra, en général, envisager une estimation simultanée de β et $\bar{R}$ que dans le cas de systèmes de fonctions de consommation suffisamment agrégés et pour lesquels on dispose d'un nombre relativement élevé d'observations. Aussi, se contentera-t-on par la suite, dans les applications, de la *procédure d'estimation à 2 étapes* décrite ci-après.

- *Première étape.* On détermine les estimations $\hat{\beta}$ et $\tilde{\beta}$ des moindres carrés simples et du maximum de vraisemblance en posant $\bar{R} = 0$ (modèle de type statique). A l'aide des relations (129), on calcule alors les estimations suivantes pour $\bar{R}$:

$$(131) \quad \hat{\bar{R}} = \bar{R}^* (\hat{\beta}) \quad \text{et} \quad \tilde{\bar{R}} = \bar{R}^* (\tilde{\beta}) ,$$

associées à $\hat{\beta}$ et $\tilde{\beta}$, respectivement.

- *Deuxième étape.* On se donne les matrices $\hat{\bar{R}}$ et $\tilde{\bar{R}}$, dont les éléments sont dès lors supposés constants, et l'on détermine dans le cadre de la spécification (128) les estimations $\hat{\hat{\beta}}$ et $\tilde{\tilde{\beta}}$ des moindres carrés simples et du maximum de vraisemblance associées aux matrices $\hat{\bar{R}}$ et $\tilde{\bar{R}}$, respectivement.

Les estimations que l'on obtient ainsi seront dites des *quasi-moindres carrés* pour $\hat{\bar{R}}$ et $\hat{\hat{\beta}}$ et du *quasi-maximum de vraisemblance* pour $\tilde{\bar{R}}$ et $\tilde{\tilde{\beta}}$. On en déduit les estimations suivantes pour Λ_ϵ :

$$(132) \quad \hat{\Lambda}_\epsilon = \Lambda_\epsilon^* (\hat{\hat{\beta}}, \hat{\bar{R}}) \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_\epsilon = \Lambda_\epsilon^* (\tilde{\tilde{\beta}}, \tilde{\bar{R}}) ,$$

où

$$\Lambda_\epsilon^* (\beta, \bar{R}) = \frac{1}{T-1} \sum_t [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta)] [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{R}, \beta)]' .$$

On considère également ⁽¹⁾ les estimations $\hat{\hat{\Sigma}}_\beta$ et $\tilde{\tilde{\Sigma}}_\beta$ des matrices des variances et covariances asymptotiques Σ_β et $\tilde{\Sigma}_\beta$:

(1) Cf. [9].

$$(133) \quad \hat{\Sigma}_{\beta} = \left[(X'X)^{-1} X' \Theta X (X'X)^{-1} \right]_{\beta=\hat{\beta}, \Lambda_{\epsilon}=\hat{\Lambda}} ,$$

$$\text{avec } X' = \left\| \frac{\partial g(x_t^*, \hat{R}; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=2,3,\dots,T} \quad \text{et } \Theta = I \otimes \Omega_{\epsilon} ;$$

$$(134) \quad \tilde{\Sigma}_{\beta} = \left[\bar{X}' \Phi^{-1} \bar{X} \right]_{\beta=\tilde{\beta}, \Lambda_{\epsilon}=\tilde{\Lambda}}^{-1} ,$$

$$\text{avec } \bar{X} = \left\| \frac{\partial \bar{g}(x_t^*, \bar{R}; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=2,3,\dots,T} \quad \text{et } \Phi = I \otimes \Lambda_{\epsilon} \quad (1) .$$

Concernant cette procédure d'estimation, il est évident qu'il n'y a aucune raison, si ce n'est un souci de simplicité, d'arrêter le processus de calcul à la deuxième étape.

Quant à l'interprétation des estimations retenues pour la matrice $\bar{R}$, on peut observer que la matrice $\bar{R}^*$ exprimée par la relation (129) correspond à l'estimateur des moindres carrés simples de la matrice des coefficients $\bar{R}$ d'un modèle linéaire de la forme :

$$\bar{d}_t - \bar{f}_t = \bar{R} (\bar{d}_{t-1} - \bar{f}_{t-1}) + \epsilon_t ,$$

pour des valeurs données des "observations" $\bar{d}_t - \bar{f}_t$, $t=1,2,\dots,T$.

Comme on l'a déjà souligné, la connaissance de la matrice $\bar{R}$ ne permet pas d'identifier la matrice R . Cela ne nuit cependant pas à la spécification du système complet des n -fonctions de dépense

(1) On a :

$$\frac{\partial g(x_t^*, \bar{R}; \beta)}{\partial \beta'} = \bar{P} \frac{\partial \bar{g}(x_t^*, \bar{R}; \beta)}{\partial \beta'} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial \bar{g}(x_t^*, \bar{R}; \beta)}{\partial \beta'} = \frac{\partial \bar{f}(x_t; \beta)}{\partial \beta'} - \bar{R} \frac{\partial \bar{f}(x_{t-1}; \beta)}{\partial \beta'} .$$

(127), qui est définie par additivité :

$$d_t = \bar{P} \bar{d}_t + e_n r_t = \bar{P} \bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{R}) + e_n r_t + \varepsilon_t .$$

La problématique de l'estimation des modèles dynamiques du type SAD et SAQ ⁽¹⁾ donne lieu à une démarche assez voisine à celle adoptée dans le cadre d'un modèle du type SAR, décrite ci-dessus.

Soit par exemple la spécification économétrique du système SAD qui découle des relations (55) associées à une formulation aléatoire statique :

$$(135) \quad \begin{cases} d_t = g(x_t^*; \beta, D) + u_t \\ E(u_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(u_t u_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega, \quad t, \tau=2, 3, \dots, T \end{cases} ,$$

avec :

$$g(x_t^*; \beta, D) = d_{t-1} + D [f(x_t; \beta) - d_{t-1}] \quad (2) ,$$

et qui s'écrit, pour le système des n-1 premières fonctions de dépense, sous la forme :

$$(136) \quad \begin{cases} \bar{d}_t = \bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{D}) + \bar{u}_t \\ E(\bar{u}_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\bar{u}_t \bar{u}_\tau') = \delta_{t\tau} \Lambda, \quad t, \tau=2, 3, \dots, T \end{cases} ,$$

où l'on pose :

$$\bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{D}) = P d_{t-1} + \bar{D} [f(x_t; \beta) - d_{t-1}] \quad \text{et} \quad \bar{D} = PD .$$

(1) Voir Chapitre II, point 3., paragraphe 3.2 et Chapitre III, point 3. .

(2) On obtient la spécification économétrique du système SAQ (57) en

remplaçant $g(x_t^*; \beta, D)$ par

$$g(x_t^*; \beta, Q) = \bar{p}_t q_{t-1} + Q [f(x_t; \beta) - \bar{p}_t q_{t-1}] .$$

Dans les deux cas $f(x_t; \beta)$ exprime le niveau des dépenses désirées.

Comme $d_t = \bar{P} \bar{d}_t + e_n r_t$, il vient :

$$d_t = d_{t-1} + \bar{P} \bar{D} [f(x_t; \beta) - d_{t-1}] + e_n (r_t - r_{t-1}).$$

Par additivité :

$$v' D = v' \quad \text{et} \quad D = \bar{P} \bar{D} + e_n v' ;$$

étant donné $\bar{D}$, la matrice D est identifiable, et l'on pourra déduire la spécification économétrique du système complet (135) de la spécification du système des $n-1$ fonctions (136).

Les estimateurs des moindres carrés simples pour $\bar{D}$ et β sont définis par les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial \bar{D}} = 0 ,$$

$$\text{avec } S = \sum_t [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{D})]' \bar{P}' \bar{P} [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{D})] .$$

La condition $\frac{\partial S}{\partial \bar{D}} = 0$ conduit à poser :

$$(137) \quad \bar{D}^*(\beta) = \left[\sum_t \bar{d}_t - \bar{d}_{t-1} (f_t - d_{t-1})' \right] \left[\sum_t (f_t - d_{t-1})(f_t - d_{t-1})' \right]^{-1} ,$$

où $f_t = f(x_t; \beta)$.

On devra donc avoir $T \geq n$.

De même, pour des vecteurs aléatoires $\bar{u}_t$ normaux, les estimateurs qui maximisent le logarithme de la vraisemblance de l'échantillon $\bar{d}$:

$$L^* = L^*(\beta, \bar{D}, \Lambda^{-1} \mid \bar{d}, x^*) ,$$

résultent de la résolution par rapport à β , $\bar{D}$ et Λ^{-1} des conditions :

$$\frac{\partial L^*}{\partial \beta} = 0 , \quad \frac{\partial L^*}{\partial \Lambda^{-1}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L^*}{\partial \bar{D}} = 0 .$$

On vérifie que pour Λ^{-1} et $\bar{D}$ on a :

$$(138) \quad \begin{cases} \Lambda^* (\beta, \bar{D}) = \frac{1}{T-1} \sum_t [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{D}, \beta)] [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \bar{D}, \beta)]' \\ \bar{D} = \bar{D}^* (\beta) \end{cases},$$

où $\bar{D}^* (\beta)$ est donné par (137).

Les relations (137) et (138) présentent le même intérêt, du point de vue de l'estimation simultanée de β et $\bar{D}$, que les relations (129) et (130) dans le cas d'un système du type SAR ⁽¹⁾.

Quant à la procédure d'estimation à deux étapes, que l'on retiendra par la suite dans les applications, elle s'inspire également d'une démarche analogue à celle que l'on a envisagé pour le système (128). Notamment, on détermine dans une première étape les estimations $\hat{\beta}$ et $\tilde{\beta}$ associées à la matrice $\bar{D} = 0$, dont on déduit les estimations pour $\bar{D}$:

$$(139) \quad \hat{\bar{D}} = \bar{D}^* (\hat{\beta}) \quad \text{et} \quad \tilde{\bar{D}} = \bar{D}^* (\tilde{\beta})$$

Dans une deuxième étape, on calcule les estimations des *quasi-moindres carrés* $\hat{\beta}$ correspondant à la matrice $\hat{\bar{D}}$, et les estimations du *quasi-maximum de vraisemblance* $\tilde{\beta}$ associées à la matrice $\tilde{\bar{D}}$. On envisagera dès lors les estimations suivantes pour Λ :

$$(140) \quad \hat{\Lambda} = \Lambda^* (\hat{\beta}, \hat{\bar{D}}) \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda} = \Lambda^* (\tilde{\beta}, \tilde{\bar{D}}),$$

$$\text{avec} \quad \Lambda^* (\beta, \bar{D}) = \frac{1}{T-1} \sum_t [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{D})] [\bar{d}_t - \bar{g}(x_t^*; \beta, \bar{D})]',$$

ainsi que les estimations des matrices des variances et covariances asymptotiques $\Sigma_{\hat{\beta}}$ et $\Sigma_{\tilde{\beta}}$:

$$(141) \quad \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \left[(X'X)^{-1} X' \otimes X (X'X)^{-1} \right]_{\beta=\hat{\beta}, \Lambda=\hat{\Lambda}},$$

(1) En particulier, le problème de l'estimation simultanée peut se résumer dans la recherche du maximum d'une fonction critère par rapport à β seulement.

$$\text{avec } X = \left\| \frac{\partial g(x_t^*, \hat{D}; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=2,3,\dots,T} \quad \text{et } \Theta = I \otimes \Omega \quad ;$$

$$(142) \quad \tilde{\Sigma}_{\tilde{\beta}}^{-1} = \left[\bar{X}' \Phi^{-1} \bar{X} \right]^{-1}_{\beta=\tilde{\beta}, \Lambda=\tilde{\Lambda}} \quad (1) \quad ,$$

$$\text{avec } \bar{X} = \left\| \frac{\partial \bar{g}(x_t^*, \bar{D}; \beta)}{\partial \beta'} \right\|_{t=2,3,\dots,T} \quad \text{et } \Phi = I \otimes \Lambda \quad .$$

Comme on l'a déjà souligné, les propriétés statistiques des estimateurs envisagés ne peuvent être appréciées que dans le cadre d'expériences de simulation.

(1) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x_t^*, D; \beta)}{\partial \beta'} &= D \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta'} = \bar{P} \frac{\partial \bar{g}(x_t^*, \bar{D}; \beta)}{\partial \beta'} \quad , \\ \frac{\partial \bar{g}(x_t^*, \bar{D}; \beta)}{\partial \beta'} &= \bar{D} \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta'} \quad , \\ \text{avec } D &= \bar{P} \bar{D} + e_n \quad , \quad e_n' \frac{\partial f(x_t; \beta)}{\partial \beta'} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Chapitre VI EXPERIENCES AVEC LES DONNEES DU ROYAUME-UNI,

1900/38 - 1948/67

1. Les données utilisées

Les différents systèmes de fonctions de consommation introduits aux chapitres III et IV ont été estimés sur la base d'une ventilation en $n = 8$ rubriques de la *consommation privée du Royaume-Uni*, 1900/38 - 1948/67. Le choix de ces séries est principalement dû au nombre d'observations disponibles, ce qui permet d'envisager des spécifications comportant un nombre relativement élevé de paramètres. Par ailleurs, l'étendue même de la période d'observation (1900-1967) rend d'autant plus plausible, par référence aux explications de type statique de la consommation semi-agrégée, l'hypothèse de modifications dans le temps de la structure du phénomène étudié.

Les rubriques, ou catégories de dépenses retenues sont données ci-après ⁽¹⁾, avec le contenu économique qu'elles recouvrent.

1. Habillement : articles chaussants, vêtements d'hommes et de femmes
2. Communications
3. Loisirs : journaux, livres et périodiques, loisirs
4. Boissons, tabac : bière, vins, spiritueux, cidre ; cigarettes, autres tabacs
5. Divers : articles pharmaceutiques, biens de divertissement, autres biens divers; autres services; solde des dépenses à l'étranger des résidents et des dépenses des touristes dans le pays
6. Transports : véhicules à moteur, cycles à pédales; frais d'entretien et de marche des véhicules à moteur; chemins de fer, bus, autocars, trams, etc.
7. Dépenses pour le logement : loyer, charges, eau, entretien, réparations; charbon et coke, électricité, gaz, autres combustibles; ameublement; allumettes, savons et autres accessoires de nettoyage, tissus d'ameublement et quincaillerie; services domestiques

(1) Source : Cf. [1]. On pourra également consulter [1] pour plus de détails et pour les méthodes d'évaluation.

8. Denrées alimentaires : pain et céréales, viande et jambon, poisson, huiles et graisses, sucre, produits laitiers, fruits, pommes de terre et autres légumes, boissons non alcooliques, autres produits manufacturés.

Pour ces différentes catégories de dépenses, la figure I en annexe représente l'évolution de la consommation en volume, par tête, en livres 1958. On trouvera également, dans les figures II, III et IV, l'évolution des prix implicites nominaux (base 1958), de la consommation en valeur par tête (en livres) , et des coefficients budgétaires, respectivement.

En raison de la présence, dans les modèles dynamiques, de variables endogènes retardées, on considérera comme prédéterminées les données se référant à l'année 1900. Ainsi, la série utilisée en vue de l'estimation porte sur $T = 58$ observations des périodes 1901/38 et 1948/67.

2. Les systèmes de fonctions de consommation retenus

Les résultats d'estimations consignés en annexe dans les tableaux I à XXXIX, ont trait aux expériences les plus représentatives du point de vue de l'intérêt des différents modèles quant à leur contenu économique et du point de vue de l'adéquation aux données du Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67.

Ces modèles sont les suivants :

- i) Modèles statiques : tableaux I à VI ;
- SLD I, II ;
- SLDG III, IV ;
- SIA V ;
- SIA $\{c_t = c^0\}$ VI .

- ii) Modèles cinématiques : tableaux VII à X ;
- SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1(t-1900)\}$ VII, VIII ;
 - SLD $\{b_t = b^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0\}$ IX, X .
- iii) Modèles dynamiques : tableaux IX à XXXIX ;
- SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XI, XII ;
 - SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XIII, XIV ;
 - SLD $\{b_t = b^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XV, XVI ;
 - SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1); c_t = c^0\}$ XVII, XVIII ;
 - SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XIX, XX ;
 - SLDG $\{c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XXI, XXII ;
 - SIA $\{c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XXIII ;
 - SIA $\{c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ XXIV ;
 - SLDS XXV à XXVII ;
 - SAD XXVIII à XXXI ;
 - SAQ XXXII à XXXV ;
 - SAR XXXVI à XXXIX .

Comme on l'a vu, ces modèles admettent une spécification économétrique de la forme [116], qui résulte de l'association d'un modèle théorique statique, cinématique ou dynamique à une formulation aléatoire statique.

Les spécifications du type SLD, SLDG et le modèle SLDS ont été estimés ⁽¹⁾ par la méthode des moindres carrés simples et par la méthode du maximum de vraisemblance.

(1) Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur CDC 3800 du Centre cantonal d'informatique de Genève.

Les modèles SAD, SAQ et SAR ont été estimés par la méthode des quasi-moindres carrés et par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance ⁽¹⁾ .

Quant aux spécifications du type SIA, elles n'ont été estimées que par la méthode des moindres carrés simples ⁽²⁾ .

3. Présentation des résultats et adéquation des différents modèles

Pour chaque système de fonctions de consommation, les fonctions de dépense qui ont été estimées correspondent à la ventilation en huit rubriques de la consommation privée du Royaume-Uni. Elles expriment la consommation privée en valeur, par tête, en fonction notamment des prix implicites nominaux, base 1958, et de la consommation totale en valeur par tête, l'unité monétaire étant la livre.

Dans chaque tableau, on donne, avec les estimations obtenues pour les paramètres du modèle considéré, une estimation des *écarts quadratiques moyens* ⁽³⁾ *asymptotiques* pour les estimateurs envisagés, qui se déduit de l'estimation de la matrice des variances et

(1) Voir Chapitre V, pp. 127-135.

(2) La définition même des systèmes de fonctions de consommation

SIA $\{c_t = c^0\}$, SIA $\{c_t = c^{v1} q_{t-1}\}$ et SIA $\{c_t = c^0 + c^{v1} q_{t-1}\}$

exige que :

$$V_t ; q_t > \max. [c_t ; 0] .$$

Cette contrainte n'est pas satisfaite dans le cas de la procédure de calcul des estimations du maximum de vraisemblance pour ces modèles dans leur application aux données du Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67.

(3) Il s'agit des chiffres entre parenthèses figurant, dans les tableaux, sous chaque estimation.

covariances asymptotiques de ces estimateurs. Par ailleurs, dans le cas de contraintes de la forme $\gamma_n = 1 - \iota' \bar{\gamma}$ (ou $\gamma_n = \iota' \bar{\gamma}$) sur le vecteur de paramètres génériques $\gamma' = \|\bar{\gamma}' \quad \iota' \gamma_n\|$, l'écart quadratique moyen asymptotique de l'estimateur $\gamma_n^* = 1 - \iota' \bar{\gamma}^*$ (ou $\gamma_n^* = \iota' \bar{\gamma}^*$), est donné par la racine carrée de la variance asymptotique $\iota' \Sigma_{\gamma^*}^{-1} \iota$.

Afin de caractériser l'adéquation des différents modèles, on définit, pour la i -ème rubrique, le *coefficient de détermination* générique :

$$R_{y_i}^2 = 1 - \frac{(y_i - y_i^*)' (y_i - y_i^*)}{(y_i - \bar{y}_i \iota)' (y_i - \bar{y}_i \iota)} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad ,$$

où y_i désigne le vecteur des T observations de la variable endogène, y_i^* le vecteur correspondant calculé à l'aide du modèle estimé et $\bar{y}_i = T^{-1} \iota' y_i$.

On définit également le *coefficient de détermination d'ensemble* :

$$R_y^2 = \sum_i \alpha_i R_{y_i}^2 \quad ,$$

avec
$$\alpha_i = \frac{(y_i - \bar{y}_i \iota)' (y_i - \bar{y}_i \iota)}{\sum_i (y_i - \bar{y}_i \iota)' (y_i - \bar{y}_i \iota)} \quad .$$

S'agissant de modèles non-linéaires par rapport aux paramètres, des valeurs négatives de ces coefficients ne sont pas incompatibles avec leur définition.

On a ainsi calculé les coefficients de détermination pour les fonctions de dépense (R_d^2). Jugée à ce niveau, l'adéquation des différents modèles envisagés aux données du Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67, s'avère très bonne. En effet, pour toutes les rubriques, on remarque que $R_d^2 > 0.95$. Dès lors, il n'est pas sans intérêt d'examiner l'adéquation de ces modèles au niveau des consommations

en volume :

$$q_t = p_t^{\nu-1} d_t ,$$

et au niveau des coefficients budgétaires :

$$\omega_t = r_t^{-1} d_t .$$

Dans ce but, on présente également les coefficients de détermination R_q^2 et R_ω^2 correspondant aux fonctions de consommation en volume et aux fonctions coefficients budgétaires, respectivement.

On observe, par comparaison des coefficients R_d^2 , R_q^2 et R_ω^2 , que pour toutes les estimations on a :

$$R_d^2 > R_q^2 > R_\omega^2 ,$$

à l'exception, dans les modèles autres que le système SLDS, de la rubrique "Boissons, tabac", pour laquelle :

$$R_d^2 > R_\omega^2 > R_q^2 .$$

Cela s'explique en particulier par l'évolution des données ⁽¹⁾ de la consommation en valeur, de la consommation en volume et des coefficients budgétaires.

Pour chaque rubrique, on calcule l'*écart quadratique moyen estimé des erreurs résiduelles*, noté $\hat{\sigma}$ ou $\hat{\tilde{\sigma}}$ pour les estimations des moindres carrés simples ou des quasi-moindres carrés, et $\tilde{\sigma}$ ou $\hat{\sigma}$ pour les estimations du maximum de vraisemblance ou du quasi-maximum de vraisemblance.

On donne encore, pour toutes les estimations, la *statistique de Durbin-Watson* (D.-W.) calculée par rubrique, la somme des carrés des écarts observés (S) dans le cas des modèles estimés par la méthode des moindres carrés (ou des quasi-moindres carrés), et la

(1) Voir figures I, III et IV en annexe.

valeur maximum du logarithme de la vraisemblance (L**) pour les estimations du maximum de vraisemblance (ou du quasi-maximum de vraisemblance).

Du point de vue descriptif de l'adéquation, les estimations des moindres carrés simples et du maximum de vraisemblance des systèmes de fonctions de consommation du type SLD et SLDG et du modèle SLDS sont, dans l'ensemble, concordantes, et il en va de même pour les estimations des quasi-moindres carrés et du quasi-maximum de vraisemblance des systèmes SAD, SAQ et SAR. Il faut cependant remarquer que les estimations obtenues pour les paramètres d'un même système de fonctions de consommation diffèrent sensiblement d'après la méthode d'estimation utilisée. Cette différence apparaît d'autant plus accentuée pour les modèles comportant un nombre relativement élevé de paramètres à estimer ⁽¹⁾. En se reportant aux estimations pour les écarts quadratiques moyens asymptotiques des estimateurs, cela peut notamment s'expliquer par la multicollinéarité.

Considérons en particulier les résultats d'estimation pour le modèle SLDS, consignés dans les tableaux XXV à XXVII. S'agissant de l'estimation des moindres carrés simples, la multicollinéarité, qui apparaît notamment au niveau des paramètres b^1 et μ_1 , rend illusoire une analyse du contenu économique de ce modèle d'après les estimations pour les données du Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67. Quant à l'estimation du maximum de vraisemblance, les effets de la multicollinéarité sont moins évidents. Cependant, l'estimation obtenue pour le paramètre μ_1 est incompatible avec les hypothèses de la théorie des choix. Par ailleurs, l'estimation du paramètre structurel γ_i de la rubrique "Denrées alimentaires" est telle que la fonction de consommation envisagée n'est pas définie ⁽²⁾.

On remarquera encore, pour les écarts quadratiques moyens asymptotiques des estimateurs, que les estimations obtenues sont en général plus faibles dans le cas du maximum de vraisemblance.

(1) Voir par exemple les spécifications :

$$\text{SLD } \{b_t = b^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\} \quad , \text{ tableaux XV et XVI ;}$$

$$\text{SLD } \{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1) ; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\} \quad , \text{ tableaux XVII et XVIII ;}$$

et le modèle SLDS, tableaux XXV à XXVII .

(2) Pour toutes ces raisons, on ne reviendra pas sur l'analyse du contenu économique du modèle SLDS dans son application aux données du Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67.

Dans le cadre des extensions cinématiques et dynamiques des modèles SLD, SLDG et SIA, on peut observer, du point de vue de l'adéquation, que le passage d'une spécification où le vecteur de variable c_t est supposé constant à une spécification où c_t peut varier en fonction de variables prédéterminées, a pour effet de rendre tous les coefficients de détermination R_q^2 et R_ω^2 positifs, et conduit ainsi à une adéquation plus régulière. Le passage analogue quant au vecteur des coefficients budgétaires marginaux b_t , dans le cadre des spécifications du type SLD, laisse subsister des coefficients de détermination négatifs et apporte, relativement, une contribution moindre à la meilleure adéquation du modèle envisagé.

D'après les concepts introduits au Chapitre IV, point 3., on a effectué une comparaison systématique des fonctions de consommation SLDS, du type SLD et du type SLDG qui se fonde sur l'utilisation du *test du rapport de vraisemblance* λ . Dans tous les cas, on est conduit à refuser l'hypothèse nulle $\theta_A = \theta_B$ ⁽¹⁾ au seuil de signification de 1%. Fait exception, pour les modèles SLDG (tableau IV) et SLD (tableau II), l'hypothèse $a = 0$ qui conduit à :

$$- 2 \log \lambda = 0.62 \quad (2)$$

En vue de l'analyse du contenu économique des différents systèmes de fonctions de consommation du type SLD, SLDG ⁽³⁾ et des modèles SAD, SAQ et SAR, on ne retiendra par la suite que les estimations obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance et par la méthode

(1) On désigne par θ_A les paramètres du modèle A, qui, lorsqu'ils sont égaux à θ_B , permettent de particulariser le modèle A au modèle B.

Pour un vecteur θ_A à K composantes, $- 2 \log \lambda$ est distribué asymptotiquement selon une loi χ^2 à K degrés de liberté.

(2) Au seul de signification de 5%, la région critique est définie par : $- 2 \log \lambda > 3.84$.

(3) Pour les systèmes de fonctions de consommation du type SIA on ne dispose que de l'estimation des moindres carrés simples. Voir note (2), page 139.

du quasi-maximum de vraisemblance, respectivement. Ces estimations sont en effet statistiquement mieux fondées.

4. Autocorrélation des erreurs résiduelles

La comparaison des estimations du modèle SLD, méthode des moindres carrés simples et méthode du maximum de vraisemblance, et des estimations du système de fonctions de consommation SAR, méthode des quasi-moindres carrés et méthode du quasi-maximum de vraisemblance, éclaire quelque peu le rôle joué par l'autocorrélation des erreurs résiduelles inhérente en général aux séries chronologiques.

En effet, les tableaux I et II présentent les résultats d'estimation du système SLD issus de l'association du modèle théorique et d'une formulation aléatoire statiques, tandis que le système SAR, dont les résultats d'estimation figurent dans les tableaux XXXVI à XXXIX, peut s'interpréter comme l'association du modèle théorique SLD statique avec la formulation aléatoire dynamique :

$$u_t = R u_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

qui traduit l'autocorrélation des erreurs résiduelles u_t .

Afin de comparer l'*éloignement* entre les diverses estimations obtenues pour les paramètres b et c , on définit :

$$\Delta(\beta^*, \beta^{**}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|\beta_i^* - \beta_i^{**}|}{|\beta_i^{**}|} ,$$

qui, pour le vecteur des m paramètres génériques β , caractérise l'éloignement entre les estimations β^* et β^{**} .

On a les résultats suivants :

i) Paramètres b :

$$\Delta(\hat{b}, \hat{\hat{b}}) = 0.1207 , \quad \Delta(\tilde{b}, \tilde{\tilde{b}}) = 0.0506 ,$$

$$\Delta(\hat{\hat{b}}, \tilde{b}) = 0.0642 , \quad \Delta(\hat{\hat{b}}, \tilde{\tilde{b}}) = 0.0998 .$$

ii) Paramètres c :

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{c}, \hat{c}) &= 0.4344 & , & & \Delta(\tilde{c}, \tilde{c}) &= 0.0148 & , \\ \Delta(\hat{c}, \tilde{c}) &= 0.2849 & , & & \Delta(\hat{\tilde{c}}, \tilde{c}) &= 0.3623 & . \end{aligned}$$

D'un point de vue descriptif, les estimations du maximum de vraisemblance du système SLD et du quasi-maximum de vraisemblance du système SAR pour les paramètres b et c sont peu différentes, l'éloignement étant le plus faible entre $\tilde{b}$ et $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ et $\tilde{c}$. Inversement, c'est entre les estimations des moindres carrés et des quasi-moindres carrés que l'éloignement est le plus élevé :

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{b}, \hat{b}) &> \Delta(\hat{\tilde{b}}, \tilde{b}) > \Delta(\hat{b}, \tilde{b}) > \Delta(\tilde{b}, \tilde{b}) & , \\ \Delta(\hat{c}, \hat{c}) &> \Delta(\hat{\tilde{c}}, \tilde{c}) > \Delta(\hat{c}, \tilde{c}) > \Delta(\tilde{c}, \tilde{c}) & . \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'éloignement entre les estimations des quasi-moindres carrés et du quasi-maximum de vraisemblance est plus important que l'éloignement entre les estimations des moindres carrés et du maximum de vraisemblance, et les écarts entre $\hat{c}$ et $\tilde{c}$, $\hat{\tilde{c}}$ et $\tilde{c}$ sont tous de même signe, négatifs.

Comme on l'a souligné, la matrice R, telle que $\iota'R = \rho\iota'$, où ρ est un paramètre inconnu, n'est pas identifiable, mais les valeurs propres de la matrice R sont les valeurs propres de la matrice $\bar{R} = P R \bar{P}$ différentes de ρ . D'après les estimations des quasi-moindres carrés et du quasi-maximum de vraisemblance pour $\bar{R}$, consignés dans les tableaux XXXVII et XXXIX, respectivement, on a calculé les valeurs propres de ces matrices, dont les modules sont donnés ci-après :

Valeurs propres en module de la matrice $\bar{R}$	
Estimation des quasi-moindres carrés	Estimation du quasi-maximum de vraisemblance
0.5938 *	0.8919 *
0.8047 *	0.8166 *
0.9063 *	0.5799 *
0.5142	0.4958

* : Valeurs propres complexes.

Tous les modules sont inférieurs à l'unité. On peut alors déduire des estimations pour $\bar{R}$ et de la matrice Λ_{ϵ} des variances et covariances des erreurs résiduelles $\bar{\epsilon}_t = P \epsilon_t$, les estimations correspondantes des matrices :

$$\bar{\Gamma}_0 = E(\bar{u}_t \bar{u}_t') = \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{R}^{\tau} \Lambda_{\epsilon} \bar{R}'^{\tau} ,$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta} = E(\bar{u}_t \bar{u}_{t+\theta}') = \bar{\Gamma}_0 \bar{R}'^{\theta} \quad \text{et}$$

$$\Gamma_{\theta} = \bar{P} \bar{\Gamma}_{\theta} \bar{P}' , \quad \theta=0,1,2,\dots ,$$

Le tableau suivant donne les estimations des quasi-moindres carrés et du quasi-maximum de vraisemblance des écarts quadratiques moyens des erreurs résiduelles u_t .

Rubriques	$\hat{\sigma}_u$	$\hat{\sigma}_u$
1. Habillement	0.659	0.635
2. Communications	0.097	0.099
3. Loisirs	0.855	0.853
4. Boissons, tabac	1.036	1.085
5. Divers	1.207	1.142
6. Transports	1.111	0.947
7. Dépenses pour le logement	1.693	1.715
8. Denrées alimentaires	2.816	2.549

Par comparaison avec les estimations pour σ_u des moindres carrés simples $\hat{\sigma}_u$ et du maximum de vraisemblance $\tilde{\sigma}_u$, du système SLD qui figurent dans les tableaux I et II, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{\sigma}_u, \hat{\sigma}_u) &= 0.0736 & , & & \Delta(\tilde{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_u) &= 0.0406 & , \\ \Delta(\hat{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_u) &= 0.0737 & , & & \Delta(\hat{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_u) &= 0.0579 & . \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Delta(\hat{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_u) > \Delta(\hat{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_u) \text{ et } \Delta(\hat{\sigma}_u, \hat{\sigma}_u) > \Delta(\tilde{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_u) ;$$

dans tous les cas, l'éloignement est relativement faible entre les diverses estimations, et c'est entre $\tilde{\sigma}_u$ et $\hat{\sigma}_u$ qu'il est le plus faible.

Quant aux écarts quadratiques moyens asymptotiques des estimateurs envisagés, on vérifie que les estimations calculées par les méthodes des moindres carrés simples et du maximum de vraisemblance sont moins élevées que celles propres aux méthodes des quasi-moindres carrés et du quasi-maximum de vraisemblance, avec, pour chaque rubrique :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_b &< \hat{\sigma}_b & , & & \tilde{\sigma}_b &< \hat{\sigma}_b & \text{ et} \\ \tilde{\sigma}_c &< \hat{\sigma}_c & , & & \tilde{\sigma}_c &< \hat{\sigma}_c & . \end{aligned}$$

D'après les valeurs calculées, pour les différentes estimations, de la statistique de Durbin-Watson, dont le caractère est ici essentiellement descriptif, le système SAR permet de corriger, quant aux estimations des fonctions de consommation du système SLD statique, les effets dus à l'autocorrélation des erreurs résiduelles. Toutefois, les estimations des paramètres b et c ne sont que peu affectées par les corrections introduites dans le cadre du système SAR ⁽¹⁾.

(1) Cela s'explique notamment par les procédures d'estimation non-simultanées, des paramètres b et c et de la matrice $\bar{R}$, retenues pour le système SAR.

On remarquera encore que des spécifications de type auto-régressif du système SLD améliorent également, du point de vue de la statistique de Durbin-Watson, les estimations des fonctions de consommation du système statique.

5. Analyse par simulation des propriétés des estimateurs envisagés dans leur application au modèle autorégressif

$$\text{SLD } \{b_t = b^0 ; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$$

Etant donné la spécification économétrique du modèle

$$\text{SLD } \{b_t = b^0 ; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\} :$$

$$\begin{cases} d_t = \check{p}_t (c^0 + c^1 q_{t-1}) + b^0 [r_t - p_t' (c^0 + c^1 q_{t-1})] + u_t \\ E(u_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(u_t u_t') = \delta_{tt} \Omega \end{cases},$$

on a admis que les valeurs des paramètres qui caractérisent la structure du modèle sont celles de l'estimation du maximum de vraisemblance pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 ⁽¹⁾. On a également retenu l'hypothèse de normalité des erreurs résiduelles $\bar{u}_t$, avec :

$$\bar{u}_t = P u_t, \quad E(\bar{u}_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\bar{u}_t \bar{u}_t') = \delta_{tt} P \Omega P',$$

$$\text{où} \quad P = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour les données exogènes de la ventilation en $n = 8$ fonctions de la consommation du Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, on a simulé une série de $N = 100$ échantillons de $T = 58$ observations :

$$d_t^{(h)}, \quad h=1,2,\dots,N, \quad t=1,2,\dots,T.$$

(1) Paramètres b^0 , c^0 , c^1 : voir tableau XIV; matrice des variances et covariances des erreurs résiduelles Ω : voir tableau XL.

En désignant par β le vecteur des paramètres génériques de ce système, on a envisagé pour β l'estimateur des moindres carrés simples, avec la matrice des variances et covariances asymptotiques :

$$\Sigma_{\beta}^{\wedge} = \left[(X'X)^{-1} (X' \Theta X) (X'X)^{-1} \right]_{(\beta, \Omega)},$$

et l'estimateur du maximum de vraisemblance, avec la matrice des variances et covariances asymptotiques :

$$\Sigma_{\beta}^{-} = (X' \Phi^{-1} X)^{-1}_{(\beta, \Omega)}.$$

Les résultats de cette expérience de simulation figurent dans les tableaux XLI à LIV en annexe. Pour l'estimateur $\hat{\beta}$ (ou $\tilde{\beta}$), on donne, avec la valeur des paramètres β_i :

- la moyenne des estimations $\bar{\tilde{\beta}}_i = \frac{1}{N} \sum_h \hat{\beta}_i^{(h)}$;

- le biais relatif $\frac{\bar{\tilde{\beta}}_i - \beta_i}{\beta_i}$;

- les écarts quadratiques moyens estimés, $s(\hat{\beta}_i - \bar{\tilde{\beta}}_i)$, qui découlent de la matrice des variances et covariances:

$$\frac{1}{N} \sum_h (\hat{\beta}^{(h)} - \bar{\tilde{\beta}})(\hat{\beta}^{(h)} - \bar{\tilde{\beta}})';$$

- les écarts quadratiques moyens par rapport à β , $s(\hat{\beta}_i - \beta_i)$ qui découlent de la matrice des variances et covariances:

$$\frac{1}{N} \sum_h (\hat{\beta}^{(h)} - \beta)(\hat{\beta}^{(h)} - \beta)' \quad (1).$$

(1) On a évidemment $s(\hat{\beta}_i - \bar{\tilde{\beta}}_i) \leq s(\hat{\beta}_i - \beta_i)$, car

$$s^2(\hat{\beta}_i - \beta_i) = s^2(\hat{\beta}_i - \bar{\tilde{\beta}}_i) + (\bar{\tilde{\beta}}_i - \beta_i)^2.$$

Des calculs analogues ont été effectués pour les écarts quadratiques moyens des erreurs résiduelles σ_u , les écarts quadratiques moyens asymptotiques des estimateurs $\sigma_{\hat{\beta}}$ (ou $\sigma_{\tilde{\beta}}$), ainsi que pour la statistique de Durbin-Watson, dont la valeur vraie est égale à 2.

En comparant les estimations des moindres carrés simples et les estimations du maximum de vraisemblance, tableaux XLI à XLIII et XLVIII à L, respectivement, on peut faire les constatations suivantes.

- i) Au point de vue de la *mise en évidence du biais*, la moyenne des estimations du maximum de vraisemblance, $\tilde{\beta}$, est en général ⁽¹⁾ plus proche de β que la moyenne $\tilde{\beta}$ des estimations des moindres carrés simples.

D'après le critère d'éloignement Δ , on a :

$$\Delta(\tilde{b}^0, b^0) = 0.2262 \quad , \quad \Delta(\tilde{\tilde{b}}^0, b^0) = 0.1404 \quad ;$$

$$\Delta(\tilde{c}^0, c^0) = 0.7339 \quad , \quad \Delta(\tilde{\tilde{c}}^0, c^0) = 0.6690 \quad ;$$

$$\Delta(\tilde{c}^1, c^1) = 0.0983 \quad , \quad \Delta(\tilde{\tilde{c}}^1, c^1) = 0.0768 \quad .$$

Les éloignements des moyennes des estimations par rapport à b^0 , et par rapport à c^0 , sont relativement importants. Ils sont cependant principalement dus aux estimations pour les paramètres b_2^0 et c_2^0 de la rubrique "Communications".

Les écarts $\tilde{c}^1 - c^1$ et $\tilde{\tilde{c}}^1 - c^1$ sont tous de même signe, négatifs.

Les écarts $\tilde{c}^0 - c^0$ et $\tilde{\tilde{c}}^0 - c^0$ sont également tous de même signe, positifs, à l'exception de la rubrique "Communications" pour laquelle ils sont négatifs, et de la rubrique "Transports" pour laquelle ils changent de signe suivant la méthode d'estimation. Excepté les rubriques "Divers" et "Dépenses pour le logement", les écarts $\tilde{b}^0 - b^0$ sont de même signe que les écarts $\tilde{\tilde{b}}^0 - b^0$, positifs ou négatifs.

(1) Font exception les moyennes des estimations pour les paramètres b_7^0 , c_2^0 , c_5^0 et c_5^1 .

- ii) Jugée d'après les écarts quadratiques moyens $s(\hat{\beta} - \bar{\beta})$ et $s(\tilde{\beta} - \bar{\beta})$, la répartition pour les estimations du maximum de vraisemblance est, à l'exception des estimations pour le paramètre b_6^0 , plus concentrée que la répartition pour les estimations des moindres carrés simples.

Concernant la comparaison des estimations pour les écarts quadratiques moyens des erreurs résiduelles σ_u , tableaux XLIV et LI, les écarts $\tilde{\sigma}_u - \sigma_u$ et $\bar{\sigma}_u - \sigma_u$ sont généralement ⁽¹⁾ de même signe, négatifs; les éloignements des moyennes des estimations par rapport à σ_u sont relativement peu importants :

$$\Delta(\bar{\sigma}_u, \sigma_u) = 0.0357 \quad , \quad \Delta(\tilde{\sigma}_u, \sigma_u) = 0.0334 \quad ,$$

l'éloignement étant un peu plus élevé pour la moyenne des estimations des moindres carrés simples.

L'analyse descriptive des propriétés des estimateurs $\hat{\sigma}_{\beta}$ pour σ_{β} et $\tilde{\sigma}_{\beta}$ pour σ_{β} résulte des tableaux XLV à XLVII, et LII à LIV, respectivement. Elle conduit aux remarques suivantes :

- i) Les écarts $\bar{\sigma}_{b^0} - \sigma_{b^0}$ et $\tilde{\sigma}_{b^0} - \sigma_{b^0}$ sont tous de même signe, négatifs; pour toutes les rubriques :

$$\frac{|\bar{\sigma}_{b^0} - \sigma_{b^0}|}{\sigma_{b^0}} > \frac{|\tilde{\sigma}_{b^0} - \sigma_{b^0}|}{\sigma_{b^0}} \quad (2) \quad .$$

De plus :

$$s(\sigma_{b^0} - \bar{\sigma}_{b^0}) < s(\hat{\sigma}_{b^0} - \bar{\sigma}_{b^0}) \quad .$$

(1) Fait exception la rubrique "Communications".

(2) On a également :

$$\Delta(\bar{\sigma}_{b^0}, \sigma_{b^0}) = 0.1730 \quad , \quad \Delta(\tilde{\sigma}_{b^0}, \sigma_{b^0}) = 0.1185 \quad ;$$

$$\Delta(\bar{\sigma}_{c^0}, \sigma_{c^0}) = 0.1398 \quad , \quad \Delta(\tilde{\sigma}_{c^0}, \sigma_{c^0}) = 0.2801 \quad ;$$

$$\Delta(\bar{\sigma}_{c^1}, \sigma_{c^1}) = 0.0921 \quad , \quad \Delta(\tilde{\sigma}_{c^1}, \sigma_{c^1}) = 0.1104 \quad .$$

ii) S'agissant des estimations pour les écarts quadratiques moyens asymptotiques autre que $\sigma_{\hat{b}^0}^0$ et $\sigma_{\tilde{b}^0}^0$, les biais relatifs sont en général moins élevés dans le cas des estimations du maximum de vraisemblance, celles-ci étant, quant à leur répartition, plus concentrées.

La comparaison des écarts quadratiques moyens $s(\hat{\beta} - \tilde{\beta})$, $s(\hat{\beta} - \bar{\beta})$ avec les paramètres $\sigma_{\hat{\beta}}^0$, $\sigma_{\tilde{\beta}}^0$, respectivement, permet de porter un premier jugement sur $\sigma_{\hat{\beta}}^0$ et $\sigma_{\tilde{\beta}}^0$ comme approximation des écarts quadratiques moyens des estimateurs $\hat{\beta}$ et $\tilde{\beta}$. On a, au point de vue de l'éloignement :

$$\Delta[\sigma_{\hat{b}^0}^0, s(\hat{b}^0 - \tilde{b}^0)] = 0.1142, \quad \Delta[\sigma_{\tilde{b}^0}^0, s(\tilde{b}^0 - \bar{b}^0)] = 0.1140;$$

$$\Delta[\sigma_{\hat{c}^0}^0, s(\hat{c}^0 - \tilde{c}^0)] = 0.2379, \quad \Delta[\sigma_{\tilde{c}^0}^0, s(\tilde{c}^0 - \bar{c}^0)] = 0.2597;$$

$$\Delta[\sigma_{\hat{c}^1}^1, s(\hat{c}^1 - \tilde{c}^1)] = 0.1224, \quad \Delta[\sigma_{\tilde{c}^1}^1, s(\tilde{c}^1 - \bar{c}^1)] = 0.1749.$$

L'éloignement est le plus élevé pour les paramètres c^0 et c^1 .

Par ailleurs, on a en général :

$$\sigma_{\hat{c}^0}^0 < s(\hat{c}^0 - \tilde{c}^0) \quad (1), \quad \sigma_{\tilde{c}^0}^0 < s(\tilde{c}^0 - \bar{c}^0),$$

$$\sigma_{\hat{c}^1}^1 < s(\hat{c}^1 - \tilde{c}^1) \quad (2) \quad \text{et} \quad \sigma_{\tilde{c}^1}^1 < s(\tilde{c}^1 - \bar{c}^1) \quad (3).$$

On a également, quant à la moyenne des estimations du maximum de vraisemblance :

$$\bar{\sigma}_{\tilde{\beta}}^0 < s(\tilde{\beta} - \bar{\beta}),$$

tandis que, à l'exception de la rubrique "Transports" dans le cas des paramètres b^0 , la moyenne des estimations des moindres carrés simples est telle que :

$$\bar{\sigma}_{\hat{\beta}}^0 < s(\hat{\beta} - \bar{\beta}) \quad (4).$$

(1) Fait exception la rubrique "Dépenses pour le logement".

(2) Fait exception la rubrique "Transports".

(3) Fait exception la rubrique "Communications".

(4) Excepté les rubriques "Transports", paramètres b^0 , et "Habillement", paramètres c^0 , on a toutefois :

$$\bar{\sigma}_{\hat{b}^0}^0 < s(\hat{b}^0 - \tilde{b}^0) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{\tilde{c}^0}^0 < s(\tilde{c}^0 - \bar{c}^0).$$

Pour la statistique de Durbin-Watson, les résultats de l'expérience de simulation envisagée figurent dans le tableau LV. On constate en particulier que les biais relatifs sont peu importants, que la moyenne des estimations des moindres carrés simples est, à l'exception des rubriques "Transports" et "Dépenses pour le logement", inférieure à la moyenne des estimations du maximum de vraisemblance, et que les écarts quadratiques moyens estimés ne sont pas négligeables quant à l'appréciation du biais.

Un jugement plus global du biais pour les estimations des m paramètres β peut encore être envisagé grâce à la *statistique de Hotelling*, qui s'écrit, par exemple, pour $\hat{\beta}$:

$$T_{\hat{\beta}}^2 = \frac{N(N-m)}{m} (\hat{\beta} - \bar{\beta})' \hat{B}^{-1} (\hat{\beta} - \bar{\beta}), \quad (1)$$

où :

$$\hat{B} = \sum_{h=1}^N (\hat{\beta}^{(h)} - \bar{\beta})(\hat{\beta}^{(h)} - \bar{\beta})',$$

avec une expression analogue pour $\tilde{\beta}$. De même, on envisage cette statistique pour les estimations des paramètres b^0 , c^0 et c^1 considérés indépendamment.

On obtient les résultats suivants :

Estimation des moindres carrés simples	Estimation du maximum de vraisemblance
$T_{\hat{b}^0}^2 = 17.15$	$T_{\tilde{b}^0}^2 = 20.17$
$T_{\hat{c}^0}^2 = 40.39$	$T_{\tilde{c}^0}^2 = 31.76$
$T_{\hat{c}^1}^2 = 45.19$	$T_{\tilde{c}^1}^2 = 46.57$
$T_{\hat{\beta}}^2 = 19.40$	$T_{\tilde{\beta}}^2 = 17.65$

(1) Pour $\hat{\beta}$ distribué normalement, $T_{\hat{\beta}}^2$ suit une loi de Fisher-Snedecor, $F_{m, N-m}$ à m et $N-m$ degrés de liberté, respectivement.

Dans tous les cas, l'hypothèse d'absence de biais est à refuser, au seuil de 1%.

En conclusion, la présence de biais, qui peuvent être importants, semble inhérente à un modèle autorégressif de ce type, tout au moins pour des échantillons de taille finie. Le caractère biaisé des estimateurs envisagés est un premier lieu imputable aux paramètres c^1 , qui sont sous-estimés, et dans une mesure moindre aux paramètres c^0 , en général surestimés, et aux paramètres b^0 . Enfin, les estimateurs retenus pour les écarts quadratiques moyens asymptotiques sous-estiment la dispersion par rapport aux paramètres β , et sous-estiment également le plus souvent les écarts quadratiques moyens. Globalement, les estimations du maximum de vraisemblance pour β apparaissent comme étant plus concentrées, et les biais relatifs moins importants.

Toutefois, la présence de biais au niveau des estimations des paramètres n'implique pas forcément la présence de biais importants quant à l'estimation même du système de fonction de consommation⁽¹⁾.

On comparera les résultats de cette expérience de simulation à celles effectuées pour le système SLD statique sur la base de la ventilation en huit rubriques retenues de la consommation privée du Royaume-Uni, pour les données exogènes des périodes 1900/38 - 1948/67 et 1948/67⁽²⁾.

(1) On considérera, par exemple, les résultats pour la statistique de Durbin-Watson, consignés dans le tableau LV.

(2) Cf. [47], pp. 92-96.

Chapitre VII ANALYSE COMPARATIVE ET CONCLUSIONS

1. Contenu économique et estimation des différents systèmes de fonctions de consommation pour le Royaume-Uni, 1901/38-1948/67

Les remarques sur le contenu économique des différents systèmes de fonctions de consommation dans leur application aux données du Royaume-Uni, dont il est fait état ici, se fondent sur l'estimation du maximum de vraisemblance pour les modèles du type SLD et SLDG ⁽¹⁾, sur l'estimation du quasi-maximum de vraisemblance pour les modèles SAD, SAQ et SAR, et sur l'estimation des moindres carrés simples pour les modèles du type SIA. Ces remarques découlent des concepts introduits aux chapitres II, III et IV, et visent à une première comparaison ⁽²⁾ des formulations envisagées.

La distinction entre fonction de consommation de première nécessité et fonction de consommation supérieure résulte du signe des éléments du vecteur c_t , les $c_{it} > 0$ s'interprétant comme des quantités de consommations obligées, en volume, exprimées en livres 1958. On constate dans le cadre des modèles du type SLD, SLDG et SIA, que pour les différentes hypothèses faites quant à c_t , les estimations obtenues ne font apparaître que des fonctions de consommation de première nécessité. Ce résultat s'explique notamment en raison du niveau d'agrégation relativement élevé des catégories de consommation retenues. Font cependant exception, pour le modèle SIA $\{\tau_t = c^0\}$, Tableau VI, les rubriques "Communications" et "Loisirs". Or, d'une part, les estimations obtenues ne sont guère *significatives* ⁽³⁾, et d'autre part, ces rubriques donnent lieu dans les autres modèles, à des estimations pour c_{it} qui sont en moyenne les plus faibles.

(1) Pour les raisons déjà soulignées (voir p.142) on ne retiendra pas ici les estimations du modèle SLDS.

(2) Une comparaison plus complète nécessiterait l'application des modèles envisagés à d'autres données.

(3) L'adjectif "*significatif*" est utilisé dans ce contexte relativement aux écarts quadratiques moyens asymptotiques estimés.

Telle qu'elle apparaît à la figure V, SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 (t-1900)\}$, la tendance générale des c_{it} est à la hausse sur toute la période pour les rubriques autres que "Boissons, tabac", "Divers" et "Dépenses pour le logement". Eu égard aux résultats d'estimation consignés dans le tableau VIII, ce n'est toutefois que pour la rubrique "Boissons, tabac" que l'on constate une baisse significative de la consommation obligée en volume. Cela s'explique notamment, pour cette catégorie de dépense, par une diminution sensible de la consommation en volume par habitant (figure I), conjointement à une forte augmentation de son prix implicite relatif (figure II-2) sur la période d'observation envisagée. Par ailleurs, ces tendances sont en général confirmées dans le cadre des modèles du type SLD, SLDG et SIA, où l'on pose $c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}$, soit $c_t = c^1 q_{t-1}$.

Pour les modèles du type SLD et SLDG, b_t coïncide avec le vecteur des coefficients budgétaires marginaux. D'après les estimations obtenues, les éléments du vecteur b_t sont pour la plupart positifs, tout au moins sur la période 1948/67.

En considérant la figure VII et le tableau X, SLD $\{b_t = b^0 + b^1 (t-1900); c_t = c^0\}$, la tendance générale de b_{it} est à la baisse pour les rubriques "Communications", "Loisirs" et "Denrées alimentaires", mais ce n'est que pour les rubriques "Boissons, tabac", "Divers" et "Dépenses pour le logement" que l'on observe une hausse significative, pour la période envisagée. Cependant, lorsque l'on tient compte quant aux consommations obligées c_t de l'évolution de la consommation en volume, figures VIII et tableau XVI, SLD $\{b_t = b^0 + b^1 (t-1900); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$, seule la rubrique "Denrées alimentaires" accuse une tendance significative à la baisse quant à son coefficient budgétaire marginal. Les rubriques "Transports" et "Communications" révèlent alors une tendance à la hausse de leur coefficient b_{it} .

D'après les concepts introduits, les variables c_t traduisent, dans les spécifications de la forme $c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}$ ou $c_t = c^1 q_{t-1}$, l'état hérité du passé et explicitent notamment les effets d'habitudes

de consommation. A ce point de vue, les différentes estimations obtenues pour les paramètres c^1 sont concordantes et conduisent à ne distinguer que des effets du type "formation d'habitudes" ($c^1 > 0$) pour tous les modèles concernés ⁽¹⁾. Toutefois, comme on l'a déjà souligné, la baisse de la consommation en volume pour la rubrique "Boissons, tabac" se traduit par une diminution de la consommation obligée en volume de cette catégorie de dépense.

Les tableaux XVIII, SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \pi_L(t/t-1); c_t = c^0\}$ et XX SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \pi_L(t/t-1); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ présentent les résultats d'estimation de deux spécifications particulières des fonctions de consommation du type SLD ⁽²⁾. Ces modèles supposent l'existence d'un système de prix normaux définis par les relations :

$$\bar{p}_t = [I - (1 - \pi_L(t/t-1)) \check{\gamma}]^{-1} p_t ,$$

avec $\pi_L(t/t-1) = r_{t-1}^{-1} p'_t q_{t-1} ,$

sur lesquels se fonde le consommateur dans la détermination des consommations normale, compatibles avec le comportement d'optimum du cadre de la théorie des choix.

Les coefficients budgétaires marginaux rattachés aux fonctions de consommation normales sont donnés par :

$$b = b^0 + b^1 ,$$

avec, par concavité stricte de l'indicateur d'utilité du type SLD sous-jacent, $b > 0$. Quant au vecteur de paramètres γ , il est tel que :

$$\gamma = (\check{b})^{-1} b^1 .$$

(1) On en déduit notamment, dans le cadre des spécifications SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^1 q_{t-1}\}$, SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ et SLDG $\{c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$, que tous les biens sont, au sens temporel, substituables entre eux.

(2) Voir Chapitre III, point 4. .

Les estimations obtenues conduisent aux résultats suivants .

Rubriques	SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1)\}$			
	$c_t = c^0$		$c_t = c^0 + \gamma^1 q_{t-1}$	
	$\tilde{b}$	$\tilde{\gamma}$	$\tilde{b}$	$\tilde{\gamma}$
1. Habillement	0.080719	-0.179177	0.159698	0.169970
2. Communications	0.015422	0.381014	0.003345	3.820328
3. Loisirs	0.038585	2.033043	0.012779	11.780812
4. Boissons, tabac	0.054563	-0.041823	0.108725	0.721122
5. Divers	0.171403	0.519518	0.168371	0.298655
6. Transports	0.219782	-0.223912	0.271306	-0.209991
7. Dépenses pour le logement	0.219611	-0.555095	0.244041	-1.300572
8. Denrées alimentaires	0.199915	0.072500	0.031734	1.739648

Les estimations pour les paramètres b sont positives, en accord avec les hypothèses de la théorie des choix. Pour les paramètres γ , les estimations sont de même signe dans les deux modèles, à l'exception des rubriques "Habillement" et "Boissons, tabac", pour lesquelles d'ailleurs les estimations des paramètres b^1 du modèle SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1); c_t = c^0\}$ ne sont pas significatives.

D'après les deux spécifications, les estimations pour γ_i des rubriques "Transports" et "Dépenses pour le logement" sont négatives. Ainsi, dans le cas d'une hausse générale des prix de l'époque t par rapport à l'époque $t-1$ ($\Pi_L(t/t-1) > 1$), les prix normaux rattachés à ces catégories de dépense seront plus élevés que les prix effectifs. Inversement, les prix normaux seront inférieurs aux prix effectifs lorsque $\Pi_L(t/t-1) < 1$. Par ailleurs, pour $\gamma_i < 0$ le coefficient budgétaire marginal b_{it} est une fonction décroissante de $\Pi_L(t/t-1)$, donc de tous les prix p_t .

Les situations où γ_1 est positif s'interprètent de manière tout à fait symétrique.

Les estimations du maximum de vraisemblance des fonctions de consommation du type SLDG sont consignées dans les tableaux IV et XXII. Elles conduisent à des valeurs pour $\hat{a}$ qui sont positives ⁽¹⁾ et caractérisent donc les deux systèmes de fonctions de consommation comme étant à forte substitution.

Concernant les estimations des moindres carrés simples des systèmes de fonctions de consommation du type SIA, tableaux V, VI, XXIII et XXIV, on remarquera que seul le modèle SIA statique (tableau V) donne lieu à une estimation des paramètres compatible avec les hypothèses de la théorie des choix ($a > -1$).

Les estimations du quasi-maximum de vraisemblance des systèmes SAD et SAQ figurent dans les tableaux XXX, XXXL et XXXIV, XXXV, respectivement.

Dans le cadre du système SAD, l'estimation de la matrice D éclaire les effets de substitution ou de complémentarité dans le temps entre les différents biens ⁽²⁾. Dans ce but, on a ordonné les différentes rubriques d'après les valeurs décroissantes des coefficients de la matrice D, par ligne et par colonne. On a également calculé pour chaque rubrique, la somme des coefficients par ligne D_i , qui fournit une approximation de l'impact, quant à la variation des dépenses d'une période sur l'autre, d'un accroissement unitaire du

(1) L'estimation des moindres carrés simples du système SLDG statique (tableau III) donne lieu à une valeur négative pour $\hat{a}$. Le signe de l'estimation pour le paramètre a change donc dans ce cas avec la méthode d'estimation retenue.

(2) Pour le modèle théorique SAD écrit sous la forme:

$$d_t - d_{t-1} = D(f_t - d_{t-1}) \quad ,$$

on a :

$$\tilde{G}(q/q'_{t-1}) = \tilde{d}_t^{-1} (I - D) \tilde{d}_{t-1} \quad .$$

niveau des dépenses désirées par rapport aux dépenses de la période précédente. Enfin, pour apprécier les effets directs de la consommation d'une période sur l'autre, on donne le vecteur $\iota - \delta$, où δ désigne le vecteur des éléments diagonaux de la matrice D.

Une procédure analogue a été appliquée, dans le cadre du modèle SAQ, à l'estimation du quasi-maximum de vraisemblance pour la matrice Q ⁽¹⁾. Les résultats sont consignés dans les deux tableaux ci-après. On constate en particulier que les conclusions auxquelles on aboutit diffèrent sensiblement d'après le modèle retenu. Ainsi, le choix d'un mécanisme d'adaptation approprié peut s'avérer important, bien que les résultats obtenus ne permettent pas de trancher à cet égard ⁽²⁾.

Comme on l'a vu, pour le système SAR, la matrice d'adaptation R n'est pas identifiable. On ne pourra donc pas, dans le cadre de ce modèle, identifier les effets de complémentarité et de substituabilité dans le temps entre les différents biens.

(1) Pour le modèle théorique SAQ écrit sous la forme :

$$d_t - \check{p}_t q_{t-1} = Q(f_t - \check{p}_t q_{t-1}) \quad ,$$

on a :

$$\hat{G}(q/q'_{t-1}) = \check{d}_t^{-1} (I - Q) \check{p}_t q_{t-1} \quad .$$

(2) Dans cette voie, des expériences portant sur d'autres données seraient évidemment à envisager.

SAD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67.

Estimation de la matrice D par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	Hiérarchie des rubriques par ligne (1)	Hiérarchie des rubriques par colonne (1)	D _{ii}	(2) 1 - δ
1. Habillement	2. 3. 7. <u>4. 8. 5. 6.</u>	5. 8. 7. 6. <u>2. 3. 4.</u>	2.826	0.019
2. Communications	7. 4. 8. <u>3. 1. 6. 5.</u>	7. 6. 1. 5. <u>3. 4. 8.</u>	0.601	0.396
3. Loisirs	4. 7. 8. <u>5. 6. 1. 2.</u>	4. 5. 1. <u>2. 7. 6. 8.</u>	-0.069	0.790
4. Boissons, tabac	3. 7. 8. <u>5. 1. 6. 2.</u>	8. 5. 3. <u>2. 1. 7. 6.</u>	-2.004	0.216
5. Divers	3. 2. 6. 4. 1. 8. 7.	8. 6. 7. <u>2. 3. 4. 1.</u>	1.758	0.658
6. Transports	2. 5. 8. 1. <u>7. 4. 3.</u>	8. 5. 7. <u>2. 3. 1. 4.</u>	3.239	0.535
7. Dépenses pour le logement	2. 6. 5. 8. 1. <u>3. 4.</u>	4. 1. 3. <u>2. 8. 5. 6.</u>	6.109	0.603
8. Denrées alimentaires	6. 5. 4. 1. 7. <u>3. 2.</u>	7. 6. 5. <u>3. 4. 2. 1.</u>	-4.460	0.314

(1) Les chiffres désignent les numéros des rubriques. Les chiffres soulignés se réfèrent à des valeurs négatives des coefficients estimés de la matrice D et mettent ainsi en évidence les effets de complémentarité dans le temps.

(2) δ désigne le vecteur des éléments diagonaux de la matrice D.

SAQ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

Estimation de la matrice Q par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	Hiérarchie des rubriques par ligne (1)	Hiérarchie des rubriques par colonne (1)	Q _i	$1 - \delta^{(2)}$
1. Habillement	2. 3. 7. 4. 8. 5. 6.	5. 8. 6. 3. 2. 4. 7.	5.257	0.471
2. Communications	1. 6. 7. 8. 4. 5. 3.	1. 5. 3. 7. 4. 6. 8.	0.526	0.441
3. Loisirs	2. 6. 1. 4. 8. 5. 7.	4. 1. 7. 5. 2. 8. 6.	1.022	1.090
4. Boissons, tabac	3. 7. 8. 6. 5. 1. 2.	7. 1. 8. 2. 3. 5. 6.	0.209	0.399
5. Divers	2. 1. 6. 3. 8. 7. 4.	6. 7. 8. 2. 4. 3. 1.	2.356	0.653
6. Transports	8. 5. 1. 4. 7. 3. 2.	8. 5. 3. 2. 4. 7. 1.	-0.882	0.210
7. Dépenses pour le logement	3. 8. 4. 5. 6. 1. 2.	1. 4. 2. 5. 3. 6. 8.	0.242	0.325
8. Dentrées alimentaires	6. 5. 1. 4. 7. 3. 2.	6. 7. 5. 4. 2. 3. 1.	-1.610	0.748

- (1) Les chiffres désignent les numéros des rubriques. Les chiffres soulignés se réfèrent à des valeurs négatives des coefficients estimés de la matrice Q et mettent ainsi en évidence les effets de complémentarité dans le temps.
- (2) δ désigne le vecteur des éléments diagonaux de la matrice Q.

S'agissant du problème de l'équilibre de longue période, considérons, à titre d'illustration, l'estimation du maximum de vraisemblance du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}\}$, tableau XIV. L'équilibre de longue période est donné par les fonctions de consommation du système linéaire de dépenses statique, avec :

$$b = (\xi' b^0)^{-1} \check{\xi} b^0 \quad \text{et} \quad c = \check{\xi} c^0 ,$$

$$\check{\xi} = (I - \check{c}^1)^{-1} .$$

Cet équilibre est stable lorsque le rayon spectral de la matrice $(I - b^0 \check{c}^1)$ est inférieur à l'unité ⁽¹⁾. Les estimations obtenues conduisent aux résultats suivants :

Rubriques	$\tilde{b}$	$\tilde{c}$	Valeurs propres de $(I - \tilde{b}^0 \check{c}^1)$
1. Habillement	0.061047	17.64	0.4352
2. Communications	0.072802	-0.99	0.5947
3. Loisirs	0.027709	5.21	0.7169
4. Boissons, tabac	0.059536	27.60	0.7974
5. Divers	0.190167	9.72	0.9916
6. Transports	0.175376	-2.91	0.8827
7. Dépenses pour le logement	0.221055	31.72	0.9321
8. Denrées alimentaires	0.192307	61.25	0.0000

On comparera les valeurs ci-dessus pour les paramètres b et c avec les estimations correspondantes du système SLD statique (tableau II), du système SAD (tableau XXX), du système SAQ (tableau XXXIV) et du système SAR (tableau XXXVIII) ⁽²⁾.

(1) On vérifie qu'il en est bien ainsi car :

$$0 < \check{c}^1 < 1 .$$

(Voir l'annexe au Chapitre III, pp. 84-86.

(2) Comme on l'a vu, les systèmes SAD, SAQ et SAR admettent le système SLD statique comme équilibre de longue période, dont les valeurs pour les paramètres b et c figurent dans les tableaux XXX, XXXIV et XXXVIII, respectivement.

Le même type de comparaison peut être envisagé pour le système SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \pi_L(t/t-1); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$, ainsi que pour le système SLDG $\{c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ qui admet le modèle SLDG statique comme équilibre de longue période.

Une comparaison et une analyse plus détaillées des différents modèles que l'on a retenu pour le Royaume-Uni devraient également se fonder sur une discussion des différentes élasticités-dépense totale, - prix apparentes et - prix pures. Cela dépasse toutefois le cadre de ce travail.

2. Remarques terminales

Pour conclure, il apparaît opportun de dégager les voies nouvelles de recherche, qui nous semblent devoir être les plus fructueuses quant à l'analyse dynamique de la consommation semi-agrégée.

En ce qui concerne les modèles cinématiques et les modèles dynamiques visant à tenir compte de l'influence du passé, nos préférences vont aux spécifications du type SLD.

Les spécifications dynamiques du type SIA sont, au niveau du modèle théorique, d'un contenu économique très riche; cependant, à l'exception du modèle SIA statique, les contraintes qu'il conviendrait d'imposer aux différents paramètres, en vue de l'estimation, restreignent singulièrement une utilisation opérationnelle des spécifications de ce type. Quant aux spécifications du type SLDG, leur apport ne nous apparaît pas suffisamment essentiel, comparées aux spécifications du type SLD, pour compenser notamment le prix plus élevé nécessité par le calcul numérique des estimations.

Dans le cadre des spécifications du type SLD, les formulations cinématiques donnent une première approximation de l'évolution de la structure du modèle statique sous-jacent.

En particulier, on a mis en évidence le rôle primordial joué par les variables c_t . Pour les données du Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67, les estimations obtenues de ces variables, qui s'interprètent comme des quantités de consommation obligée, constituent la majeure partie de la consommation en volume ⁽¹⁾.

Cela justifie dès lors l'importance qu'il faut accorder aux hypothèses concernant l'évolution dans le temps des variables c_t . A ce point de vue, l'approche proposée par Houthakker et Taylor, dans la formulation que nous en avons donnée (modèle SLDS), s'avère théoriquement attrayante; mais la multicollinéarité qui apparaît au niveau du système de fonctions de consommation à estimer, tout au moins pour les données du Royaume-Uni, en limite la portée expérimentale. Reste le choix entre des hypothèses de la forme $c_t = \check{c}^1 q_{t-1}$ et $c_t = c^0 + \check{c}^1 q_{t-1}$, et c'est évidemment la seconde de ces hypothèses que l'on est amené à retenir ⁽²⁾.

Il n'est pas aussi aisé de se prononcer dans le cas des hypothèses portant sur l'évolution des coefficients budgétaires marginaux b_t , et la problématique reste largement ouverte à cet égard. Dans la mesure où l'on s'intéresse à l'évolution dans le temps de ces coefficients, on pourra toujours recourir à une formulation de type cinématique. Ou encore, une hypothèse de la forme $b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1)$ permet d'identifier un mécanisme d'adaptation par rapport aux prix. Toutefois, eu égard à l'état des données disponibles sur la consommation semi-agrégée, il semble judicieux de retenir l'hypothèse de coefficients budgétaires marginaux constants. On restreint ainsi le nombre de paramètres du modèle à des limites raisonnables (3 n-1)

(1) Voir par exemple les figures I, V et VI en annexe.

(2) Comme on l'a vu, le système SLD $\{ b_t = b^0; c_t = \check{c}^1 q_{t-1} \}$ ne peut être envisagé comme une généralisation du système SLD statique. Par ailleurs, son estimation par la méthode du maximum de vraisemblance (tableau XII) conduit à des valeurs négatives de certains coefficients b^0 , et à des valeurs supérieures à l'unité pour les paramètres c^1 correspondants.

par rapport à la longueur des séries dont on dispose. Par ailleurs, les expériences faites avec le modèle SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + \gamma^1 q_{t-1}\}$ ne conduisent pas à suspecter l'existence d'erreurs de spécification importantes. De plus, les procédures numériques appliquées pour l'estimation de ce modèle se sont avérées suffisamment efficaces pour que l'on puisse envisager des expériences de simulation quant à l'analyse des propriétés des estimateurs dans le cas de petits échantillons, ce qui permet en particulier une première appréciation sur l'importance et le sens du biais des estimations obtenues.

S'agissant des modèles dynamiques d'adaptation, on a remarqué leur intérêt, tant au point de vue conceptuel qu'au point de vue expérimental, mais les problèmes qu'ils soulèvent sont nombreux.

Sur le plan conceptuel, ces modèles présentent l'avantage de tenir compte des plans de consommation future introduits sous la forme de niveaux de consommation désirée. Ces niveaux sont exprimés par un système de fonctions des prix et de la dépense totale de la période considérée, compatible avec un système de fonctions de consommation dans le cadre de la théorie des choix. Ces modèles tiennent également compte du passé par la définition même des mécanismes d'adaptation, qui s'appuient sur la mémoire que la cellule de consommation garde de situations antérieures. Sur ce plan, les problèmes sont donc essentiellement de deux ordres : d'une part le choix du système de fonctions exprimant le niveau des consommations désirées; d'autre part, la recherche de mécanismes d'adaptation autres que ceux retenus ici (modèles SAD, SAQ, SAR), et le problème du choix même du mécanisme d'adaptation.

Au niveau expérimental, ces modèles permettent de corriger, approximativement tout au moins, l'autocorrélation des erreurs résiduelles des séries chronologiques utilisées pour l'estimation des modèles dynamiques. Par ailleurs, les méthodes d'estimation envisagées (quasi-moindres carrés et quasi-maximum de vraisemblance), peuvent s'appliquer à des séries de données relativement courtes ⁽¹⁾ de la

(1) Par exemple, pour le modèle SAR, Cf. [9].

consommation semi-agrégée, telles qu'elles sont actuellement pour la plupart disponibles. Les problèmes cruciaux sur ce plan concernent l'étude des propriétés des estimateurs, en particulier pour la matrice d'adaptation, conjointement à la possibilité de recherches portant sur d'autres procédures d'estimation.

Enfin, la comparaison de ces modèles dans un cadre d'exploration devrait aboutir à un meilleur jugement de leur portée opératoire.

Dans ces voies, notamment, nous pensons que devrait être poursuivie l'étude des explications dynamiques de la consommation semi-agrégée.

ANNEXES

Tableaux I à LV (1)

Figures I à VIII

-
- (1) On désigne par R_d^2 , R_q^2 et R_w^2 les coefficients de détermination des fonctions de consommation en valeur, en volume et des coefficients budgétaires, respectivement. Les chiffres entre parenthèses sont les estimations des écarts quadratiques moyens asymptotiques. σ représente l'écart quadratique moyen des erreurs résiduelles et D.-W. la statistique de Durbin-Watson.

Tableau I SLD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.076403 (0.002447)	19.53 (0.81)	0.997	0.921	0.816	0.630	1.283
2. Communications	0.015779 (0.000451)	0.42 (0.22)	0.995	0.971	0.887	0.083	0.859
3. Loisirs	0.041899 (0.003027)	4.18 (0.58)	0.960	0.751	-2.680	0.806	0.210
4. Boissons, tabac	0.063372 (0.004913)	30.74 (1.03)	0.996	-0.349	0.071	0.996	0.390
5. Divers	0.174546 (0.004721)	19.95 (2.17)	0.996	0.835	-0.229	1.136	0.196
6. Transports	0.204172 (0.006360)	2.02 (1.63)	0.995	0.986	0.848	0.963	0.320
7. Dépenses pour le logement	0.228252 (0.008730)	41.38 (3.30)	0.997	0.863	0.472	1.666	0.317
8. Dentrées alimentaires	0.195577 (0.009867)	61.54 (2.68)	0.994	0.837	0.426	2.541	0.111
Caractéristiques d'ensemble			0.995	0.798	0.399	S = 782.57	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $1/b = 1$.

Tableau II SLD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	$\tilde{b}$	$\tilde{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.080921 (0.002242)	21.80 (0.41)	0.997	0.928	0.839	0.609	1.284
2. Communications	0.015441 (0.000401)	1.04 (0.09)	0.992	0.952	0.791	0.098	0.585
3. Loisirs	0.040331 (0.003011)	5.81 (0.35)	0.952	0.652	-4.689	0.878	0.191
4. Boissons, tabac	0.052509 (0.004732)	34.02 (0.47)	0.995	-0.736	-0.188	1.178	0.285
5. Divers	0.172162 (0.004510)	26.27 (0.92)	0.995	0.804	-0.475	1.171	0.180
6. Transports	0.223985 (0.003875)	7.37 (0.84)	0.996	0.987	0.752	0.861	0.409
7. Dépenses pour le logement	0.214365 (0.006905)	50.77 (1.29)	0.997	0.879	0.536	1.645	0.318
8. Denrées alimentaires	0.200287 (0.009119)	68.13 (1.40)	0.994	0.853	0.486	2.554	0.120
Caractéristiques d'ensemble			0.995	0.774	0.359	$I^{**} = -320.23$	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $u'b = 1$.

Tableau III SLDG pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.400830 (0.025482)	18.38 (1.43)	0.997	0.929	0.834	0.624	1.262
2. Communications	0.075675 (0.003341)	0.39 (0.31)	0.995	0.938	0.699	0.099	0.504
3. Loisirs	0.204520 (0.010770)	3.91 (0.87)	0.960	0.710	-3.381	0.850	0.199
4. Boissons, tabac	0.306630 (0.035383)	30.30 (1.32)	0.996	-0.493	-0.013	1.039	0.378
5. Divers	0.860239 (0.061517)	18.44 (3.23)	0.996	0.844	-0.162	1.083	0.207
6. Transports	1.080597 (0.077998)	-0.97 (3.37)	0.995	0.982	0.802	1.139	0.306
7. Dépenses pour le logement	1.092785 (0.088470)	40.22 (4.42)	0.997	0.875	0.521	1.547	0.347
8. Denrées alimentaires	1.000000	59.35 (4.10)	0.994	0.839	0.429	2.499	0.118
Caractéristiques d'ensemble	$\hat{a} = -0.4555$ (0.1864)		0.995	0.790	0.391	$S = 771.94$	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_a = 10^{-4}$, $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $b_g = 1$.

Tableau IV SLDG pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement		0.403495 (0.022154)	21.80 (0.36)	0.997	0.928	0.839	0.610	1.294
2. Communications		0.077790 (0.003223)	1.02 (0.08)	0.992	0.956	0.810	0.094	0.659
3. Loisirs		0.202227 (0.011211)	5.81 (0.33)	0.952	0.652	-4.765	0.870	0.191
4. Boissons, tabac		0.269045 (0.032071)	33.95 (0.47)	0.995	-0.781	-0.219	1.181	0.274
5. Divers		0.874352 (0.059150)	26.12 (0.83)	0.995	0.798	-0.523	1.192	0.176
6. Transports		1.112224 (0.060734)	7.34 (0.69)	0.996	0.987	0.730	0.812	0.413
7. Dépenses pour le logement		1.099479 (0.081161)	50.42 (1.23)	0.997	0.872	0.504	1.691	0.306
8. Denrées alimentaires		1.000000 (1.30)	68.10 (1.30)	0.994	0.849	0.472	2.570	0.117
Caractéristiques d'ensemble	$\tilde{a} = 0.1668$ (0.0648)			0.995	0.768	0.337	$L^{**} = -319.92$	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_a = 10^{-4}$, $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.
Normalisation : $b_8 = 1$.

Tableau V SIA pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{a}$	$\hat{b}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	-0.75864 (0.04557)	0.212009 (0.048164)	0.996	0.868	0.706	0.707	1.067
2. Communications	-0.10802 (0.17595)	0.000418 (0.000357)	0.976	0.722	-0.464	0.174	0.164
3. Loisirs	-0.34311 (0.08442)	0.006372 (0.001958)	0.971	0.815	-1.547	0.682	0.229
4. Boissons, tabac	-0.89463 (0.05880)	0.606390 (0.201010)	0.995	-0.567	-0.071	1.118	0.380
5. Divers	-0.22462 (0.07478)	0.014229 (0.004918)	0.996	0.840	-0.191	1.105	0.214
6. Transports	0.54099 (0.05293)	0.000112 (0.000038)	0.995	0.981	0.706	0.975	0.335
7. Dépenses pour le logement	-0.53692 (0.10460)	0.141880 (0.063471)	0.996	0.871	0.517	1.688	0.333
8. Denrées alimentaires	-0.84027 (0.06008)	1.000000	0.995	0.817	0.348	2.325	0.136
Caractéristiques d'ensemble			0.995	0.776	0.340	S = 735.02	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_a = 10^{-5}$, $\varepsilon_b = 10^{-6}$.
Normalisation : $b_8 = 1$.

Tableau VI SIA $\{c_t = c^0\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}^0$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	-0.0733 (0.1452)	0.001700 (0.001550)	17.56 (1.11)	0.997	0.896	0.758	0.646	1.289
2. Communications	-1.3693 (0.0692)	2.079128 (0.930444)	-12.14 (2.10)	0.893	-0.413	-7.031	0.367	0.166
3. Loisirs	-1.2931 (0.0541)	3.177857 (0.992917)	-24.50 (2.92)	0.974	0.802	-0.972	0.648	0.368
4. Boissons, tabac	3.0321 (0.8061)	0.000000 (0.000000)	34.05 (0.53)	0.997	0.506	0.613	0.804	0.565
5. Divers	1.1013 (0.2083)	0.000005 (0.000006)	24.54 (1.09)	0.997	0.926	0.519	0.902	0.352
6. Transports	0.4420 (0.0658)	0.000222 (0.000094)	3.41 (0.44)	0.998	0.992	0.848	0.571	0.563
7. Dépenses pour le logement	1.1938 (0.3011)	0.000004 (0.000006)	47.21 (2.04)	0.998	0.847	0.387	1.398	0.362
8. Denrées alimentaires	-0.9417 (0.0458)	1.000000	18.60 (4.28)	0.999	0.978	0.916	0.976	0.839
Caractéristiques d'ensemble				0.998	0.909	0.719	S = 328.55	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_a = 10^{-4}$, $\varepsilon_b = 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 10^{-2}$.
Normalisation : $b_8 = 1$.

Tableau VII SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1(t-1900)\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
 Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}^0$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.094317 (0.005956)	18.42 (1.24)	0.111 (0.028)	0.997	0.907	0.797	0.625	1.179
2. Communications	0.009360 (0.000878)	0.02 (0.12)	0.036 (0.003)	0.996	0.974	0.878	0.072	0.607
3. Loisirs	-0.014184 (0.003406)	1.68 (0.26)	0.155 (0.007)	0.993	0.959	0.551	0.341	0.524
4. Boissons, tabac	0.100470 (0.009446)	33.86 (2.37)	-0.000 (0.042)	0.997	0.513	0.610	0.842	0.517
5. Divers	0.215972 (0.007586)	20.60 (2.91)	0.192 (0.063)	0.998	0.950	0.674	0.790	0.494
6. Transports	0.267320 (0.009475)	-0.26 (2.05)	0.279 (0.071)	0.997	0.989	0.823	0.776	0.632
7. Dépenses pour le logement	0.277241 (0.014663)	43.97 (4.08)	0.225 (0.087)	0.998	0.842	0.290	1.233	0.440
8. Denrées alimentaires	0.049504 (0.008862)	50.53 (0.91)	0.614 (0.022)	0.999	0.973	0.895	0.956	0.533
Caractéristiques d'ensemble				0.998	0.914	0.727	S = 283.14	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $b^0 = 1$.

Tableau VIII SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1(t-1900)\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

Rubriques	b^0	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.091344 (0.005098)	21.37 (0.92)	0.032 (0.022)	0.997	0.929	0.839	0.606	1.227
2. Communications	0.008604 (0.000756)	0.28 (0.09)	0.030 (0.003)	0.996	0.972	0.854	0.069	0.616
3. Loisirs	-0.014449 (0.003278)	1.12 (0.26)	0.170 (0.008)	0.993	0.956	0.443	0.346	0.512
4. Boissons, tabac	0.114769 (0.009960)	39.93 (2.15)	-0.154 (0.043)	0.997	0.370	0.490	0.928	0.441
5. Divers	0.221814 (0.007393)	28.16 (2.15)	-0.017 (0.051)	0.998	0.950	0.677	0.794	0.507
6. Transports	0.245110 (0.008168)	5.44 (1.26)	0.114 (0.043)	0.996	0.985	0.654	0.826	0.502
7. Dépenses pour le logement	0.285447 (0.013792)	54.29 (3.02)	-0.052 (0.076)	0.998	0.849	0.320	1.205	0.471
8. Denrées alimentaires	0.047332 (0.008755)	51.94 (0.92)	0.576 (0.025)	0.999	0.971	0.888	0.968	0.530
Caractéristiques d'ensemble				0.998	0.905	0.696	L** = -206.20	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $1' b^0 = 1$.

Tableau IX {SLD $b_t = b^0 + b^1(t-1900)$; $c_t = c^0$ } pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	b^0	b^1	c^0	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.063271 (0.009610)	0.000366 (0.000181)	25.42 (0.78)	0.997	0.893	0.774	0.652	1.149
2. Communications	0.020907 (0.002111)	-0.000128 (0.000037)	1.99 (0.17)	0.989	0.915	0.610	0.118	0.443
3. Loisirs	0.121921 (0.015096)	-0.001585 (0.000232)	8.98 (0.50)	0.972	0.806	-1.148	0.669	0.394
4. Boissons, tabac	-0.061722 (0.015637)	0.002130 (0.000237)	35.12 (0.52)	0.997	0.636	0.713	0.828	0.738
5. Divers	0.056265 (0.015784)	0.002112 (0.000247)	33.27 (1.66)	0.998	0.942	0.624	0.770	0.373
6. Transports	0.260679 (0.025749)	-0.000204 (0.000413)	17.19 (2.49)	0.993	0.969	0.030	1.097	0.361
7. Dépenses pour le logement	0.090034 (0.021811)	0.002160 (0.000397)	60.03 (2.15)	0.998	0.872	0.486	1.354	0.416
8. Denrées alimentaires	0.448642 (0.041959)	-0.004851 (0.000572)	82.06 (2.20)	0.999	0.929	0.755	1.234	0.523
Caractéristiques d'ensemble				0.998	0.905	0.589	S = 390.01	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$.

Normalisation : $u^1 b^0 = 1$, $u^1 b^1 = 0$.

Tableau X SLD $\{b_t = b^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	b^0	b^1	c^0	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.006597 (0.011206)	0.000276 (0.000196)	24.54 (0.39)	0.997	0.901	0.791	0.639	1.187
2. Communications	0.019829 (0.001992)	-0.000090 (0.000035)	1.72 (0.09)	0.990	0.934	0.721	0.110	0.506
3. Loisirs	0.130442 (0.013598)	-0.001630 (0.000229)	8.25 (0.33)	0.971	0.803	-1.189	0.680	0.407
4. Boissons, tabac	-0.076677 (0.015117)	0.002297 (0.000247)	34.65 (0.31)	0.997	0.606	0.696	0.826	0.766
5. Divers	0.041451 (0.015188)	0.002281 (0.000256)	31.37 (0.72)	0.998	0.939	0.608	0.787	0.357
6. Transports	0.237576 (0.021038)	0.000094 (0.000353)	14.39 (1.05)	0.994	0.974	0.196	1.003	0.373
7. Dépenses pour le logement	0.089866 (0.024867)	0.002061 (0.000440)	57.93 (1.03)	0.998	0.873	0.501	1.408	0.404
8. Denrées alimentaires	0.490916 (0.030955)	-0.005289 (0.000479)	79.01 (1.23)	0.998	0.934	0.784	1.282	0.521
Caractéristiques d'ensemble				0.998	0.906	0.623	L**	-260.53

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$.

Normalisation : $b^0 = 1$, $b^1 = 0$.

Tableau XI SLD $\{b_t^0; c_t^0; q_{t-1}^0\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.183475 (0.021445)	0.973 (0.022)	0.997	0.940	0.859	0.581	1.927
2. Communications	-0.002552 (0.002643)	1.043 (0.012)	0.998	0.993	0.982	0.050	2.303
3. Loisirs	-0.020494 (0.015008)	1.028 (0.016)	0.991	0.960	0.772	0.387	2.088
4. Boissons, tabac	0.131149 (0.022549)	0.984 (0.012)	0.999	0.924	0.926	0.611	1.931
5. Divers	0.153940 (0.018422)	0.999 (0.013)	0.999	0.988	0.931	0.491	1.242
6. Transports	0.208754 (0.024749)	1.006 (0.028)	0.998	0.995	0.955	0.650	1.785
7. Dépenses pour le logement	0.261791 (0.039252)	0.992 (0.014)	0.999	0.969	0.893	1.036	2.200
8. Denrées alimentaires	0.083938 (0.027546)	1.002 (0.005)	1.000	0.989	0.966	0.720	1.666
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.980	0.936	S = 180.98	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.
Normalisation : $b^0 = 1$.

Tableau XII {SLD $b_t = b^0$; $c_t = c^1$ q_{t-1} } pour le Royaume Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	b^0	c^1	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-K.
1. Habillement	0.183090 (0.021197)	0.969 (0.020)	0.997	0.940	0.858	0.583	1.905
2. Communications	-0.003228 (0.001934)	1.047 (0.009)	0.998	0.993	0.981	0.050	2.314
3. Loisirs	-0.018183 (0.014155)	1.027 (0.015)	0.991	0.960	0.773	0.388	2.087
4. Boissons, tabac	0.136225 (0.022345)	0.980 (0.011)	0.999	0.927	0.928	0.611	1.920
5. Divers	0.156422 (0.018329)	0.996 (0.012)	0.999	0.988	0.931	0.491	1.256
6. Transports	0.217624 (0.024543)	0.998 (0.026)	0.998	0.995	0.952	0.652	1.764
7. Dépenses pour le logement	0.239121 (0.038366)	0.993 (0.011)	0.999	0.970	0.897	1.041	2.183
8. Denrées alimentaires	0.088829 (0.027280)	1.001 (0.005)	1.000	0.989	0.966	0.721	1.653
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.980	0.937	$L^{**} = -154.54$	

(1) Critères de convergence : $b^0 = 10^{-6}$, $c^1 = 10^{-3}$.
Normalisation : $b^0 = 1$.

Tableau XIII SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}^0$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_c^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.166616 (0.018359)	10.69 (1.71)	0.459 (0.086)	0.998	0.945	0.879	0.523	1.723
2. Communications	0.007410 (0.005246)	0.03 (0.08)	0.921 (0.100)	0.998	0.990	0.973	0.056	2.154
3. Loisirs	0.008459 (0.009916)	0.50 (0.32)	0.932 (0.058)	0.991	0.959	0.728	0.383	2.047
4. Boissons, tabac	0.095650 (0.015936)	10.88 (2.21)	0.646 (0.069)	0.999	0.837	0.872	0.571	1.593
5. Divers	0.154640 (0.015843)	2.79 (1.02)	0.837 (0.039)	1.000	0.988	0.921	0.401	1.472
6. Transports	0.249754 (0.022354)	0.44 (0.65)	0.741 (0.062)	0.998	0.996	0.947	0.567	1.746
7. Dépenses pour le logement	0.282352 (0.032158)	11.16 (3.27)	0.726 (0.068)	0.999	0.969	0.889	0.941	2.030
8. Denrées alimentaires	0.035118 (0.025635)	2.28 (2.18)	0.969 (0.034)	0.999	0.989	0.961	0.763	1.615
Caractéristiques d'ensemble				0.999	0.974	0.926	S = 156.53	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $1' b^0 = 1$.

Tableau XIV SLD $\{b_t=b^0; c_t=c^0+c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	b^0	c^0	c^1	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.168815 (0.016084)	10.89 (1.40)	0.382 (0.074)	0.998	0.929	0.845	0.547	1.530
2. Communications	0.002553 (0.001853)	-0.01 (0.04)	0.992 (0.034)	0.998	0.993	0.982	0.052	2.263
3. Loisirs	0.014226 (0.007559)	0.60 (0.23)	0.885 (0.040)	0.991	0.958	0.688	0.381	1.976
4. Boissons, tabac	0.114024 (0.013333)	11.80 (1.66)	0.572 (0.054)	0.999	0.845	0.874	0.562	1.511
5. Divers	0.159106 (0.013589)	1.82 (0.82)	0.813 (0.032)	1.000	0.987	0.911	0.406	1.443
6. Transports	0.261848 (0.020556)	-0.97 (0.54)	0.667 (0.053)	0.998	0.995	0.932	0.595	1.489
7. Dépenses pour le logement	0.230163 (0.023648)	7.37 (2.08)	0.768 (0.042)	0.999	0.970	0.894	0.967	2.007
8. Denrées alimentaires	0.049264 (0.022263)	3.50 (1.87)	0.943 (0.032)	0.999	0.989	0.961	0.764	1.510
Caractéristiques d'ensemble				0.999	0.974	0.922	L** = -121.41	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_o = 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 10^{-2}$, $\varepsilon_l = 10^{-3}$.
 Normalisation : $b^0 = 1$.

Tableau XV SLD $\{b_t^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}^0$	$\hat{b}^1$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_{\hat{u}}$	D.-W.
1. Habillement	0.251264 (0.048177)	-0.001695 (0.000865)	8.41 (2.03)	0.582 (0.092)	0.998	0.956	0.904	0.491	1.787
2. Communications	-0.004102 (0.005085)	0.000096 (0.000137)	0.04 (0.14)	0.999 (0.120)	0.998	0.993	0.980	0.050	2.292
3. Loisirs	-0.012928 (0.032802)	0.000306 (0.000478)	0.60 (0.34)	0.935 (0.053)	0.991	0.958	0.709	0.381	2.028
4. Boissons, tabac	0.177125 (0.055645)	-0.001515 (0.000943)	7.26 (2.80)	0.758 (0.082)	0.999	0.885	0.902	0.561	1.720
5. Divers	0.138192 (0.041869)	0.000174 (0.000820)	3.43 (1.39)	0.842 (0.050)	1.000	0.987	0.912	0.401	1.409
6. Transports	0.068072 (0.046869)	0.003693 (0.000882)	2.30 (0.48)	0.668 (0.074)	0.999	0.996	0.934	0.499	1.663
7. Dépenses pour le logement	0.183979 (0.084687)	0.001658 (0.001434)	14.65 (3.65)	0.693 (0.072)	0.999	0.970	0.892	0.933	1.983
8. Denrées alimentaires	0.198397 (0.060618)	-0.002718 (0.000949)	-0.01 (2.54)	0.998 (0.036)	1.000	0.990	0.969	0.711	1.821
Caractéristiques d'ensemble					0.999	0.978	0.933	S = 144.48	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $u^0 b^0 = 1$, $u^1 b^1 = 0$.

Tableau XVI SLD $\{b_t = b^0 + b^1(t-1900)\}$; $c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	b^0	b^1	c^0	c^1	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.195019 (0.043897)	-0.000506 (0.000693)	11.52 (1.93)	0.381 (0.087)	0.998	0.948	0.885	0.527	1.564
2. Communications	-0.007747 (0.004235)	0.000184 (0.000067)	0.18 (0.07)	0.904 (0.048)	0.998	0.992	0.975	0.049	2.193
3. Loisirs	-0.024457 (0.030816)	0.000563 (0.000406)	1.21 (0.33)	0.845 (0.041)	0.991	0.953	0.560	0.383	1.808
4. Boissons, tabac	0.155986 (0.037856)	-0.000897 (0.000535)	9.76 (1.92)	0.645 (0.059)	0.999	0.870	0.889	0.559	1.547
5. Divers	0.171806 (0.037284)	-0.000465 (0.000616)	2.21 (1.22)	0.828 (0.040)	0.999	0.985	0.893	0.408	1.359
6. Transports	0.085677 (0.041728)	0.003361 (0.000709)	2.01 (0.50)	0.538 (0.062)	0.999	0.997	0.961	0.492	1.504
7. Dépenses pour le logement	0.242858 (0.075472)	0.000034 (0.001013)	11.36 (2.36)	0.709 (0.045)	0.999	0.969	0.890	0.953	1.949
8. Denrées alimentaires	0.180858 (0.058457)	-0.002273 (0.000846)	-1.05 (2.55)	0.999 (0.036)	1.000	0.990	0.968	0.721	1.762
Caractéristiques d'ensemble					0.999	0.976	0.930	L** =	-107.21

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $b^0 = 1$, $b^1 = 0$.

Tableau XVII SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1), c_t = c^0\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	b^0	b^1	c^0	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.083950 (0.013944)	-0.008185 (0.013484)	19.08 (0.80)	0.997	0.913	0.800	0.636	1.250
2. Communications	0.013545 (0.001913)	0.002241 (0.001801)	0.28 (0.21)	0.995	0.975	0.907	0.079	0.943
3. Loisirs	-0.003917 (0.017203)	0.044875 (0.016806)	3.76 (0.57)	0.966	0.799	-1.994	0.736	0.192
4. Boissons, tabac	0.038039 (0.020256)	0.027851 (0.020595)	29.78 (1.11)	0.997	-0.269	0.127	0.948	0.344
5. Divers	0.116122 (0.024003)	0.058848 (0.023058)	18.29 (2.18)	0.996	0.832	-0.270	1.065	0.212
6. Transports	0.250012 (0.021775)	-0.048711 (0.019794)	1.11 (1.53)	0.994	0.987	0.858	0.958	0.354
7. Dépenses pour le logement	0.304390 (0.035033)	-0.073872 (0.035210)	39.72 (3.31)	0.997	0.878	0.535	1.613	0.251
8. Denrées alimentaires	0.197759 (0.053917)	-0.003046 (0.052263)	60.17 (2.66)	0.994	0.835	0.419	2.536	0.111
Caractéristiques d'ensemble				0.995	0.806	0.417	S = 750.52	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\varepsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\varepsilon_c^0 = 10^{-2}$.

Normalisation : $u^0 b^0 = 1$, $u^1 b^1 = 1$.

$\Pi_L(t/t-1)$ désigne l'indice des prix du type Laspeyres.

Tableau XVIII SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1); c_t = c^0\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	b^0	b^1	c^0	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.095182 (0.021944)	-0.014463 (0.021417)	21.03 (0.41)	0.997	0.933	0.844	0.607	1.278
2. Communications	0.009546 (0.003331)	0.005876 (0.003228)	0.85 (0.09)	0.993	0.962	0.837	0.090	0.664
3. Loisirs	-0.039860 (0.029736)	0.078445 (0.028840)	5.30 (0.34)	0.960	0.713	-3.781	0.803	0.169
4. Boissons, tabac	0.056845 (0.040745)	-0.002282 (0.040195)	33.27 (0.52)	0.995	-0.606	-0.102	1.127	0.308
5. Divers	0.082356 (0.040323)	0.089047 (0.039244)	24.27 (0.92)	0.996	0.811	-0.436	1.107	0.174
6. Transports	0.268994 (0.030546)	-0.049212 (0.029474)	5.66 (0.78)	0.996	0.988	0.818	0.848	0.404
7. Dépenses pour le logement	0.341516 (0.057871)	-0.121905 (0.056795)	48.44 (1.35)	0.997	0.891	0.590	1.588	0.246
8. Denrées alimentaires	0.185421 (0.091146)	0.014494 (0.088563)	65.99 (1.41)	0.994	0.853	0.487	2.551	0.116
Caractéristiques d'ensemble				0.995	0.788	0.398	$I^{**} =$	-304.77

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_{b^0} = 10^{-6}$, $\varepsilon_{b^1} = 10^{-6}$, $\varepsilon_{c^0} = 10^{-2}$.

Normalisation : $b^0 = 1$, $b^1 = 0$.

$\Pi_L(t/t-1)$ désigne l'indice des prix du type Laspeyres.

Tableau XIX SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \Pi_L(t/t-1); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}^0$	$\hat{b}^1$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.088303 (0.068007)	0.091343 (0.070801)	8.65 (1.39)	0.511 (0.068)	0.998	0.948	0.885	0.514	1.873
2. Communications	-0.024161 (0.009451)	0.028428 (0.009376)	0.02 (0.04)	0.958 (0.048)	0.998	0.994	0.982	0.045	2.135
3. Loisirs	-0.313124 (0.084027)	0.322523 (0.082111)	0.35 (0.15)	0.910 (0.026)	0.998	0.991	0.922	0.170	1.816
4. Boissons, tabac	-0.064847 (0.077272)	0.197466 (0.080827)	9.81 (1.92)	0.637 (0.060)	0.999	0.879	0.905	0.520	1.603
5. Divers	0.087413 (0.056699)	0.082217 (0.060087)	1.21 (0.89)	0.861 (0.033)	0.999	0.986	0.911	0.418	1.411
6. Transports	0.326407 (0.074339)	-0.102372 (0.075112)	-0.52 (0.45)	0.812 (0.042)	0.998	0.996	0.959	0.583	1.689
7. Dépenses pour le logement	0.973879 (0.202875)	-0.763880 (0.200234)	4.41 (1.63)	0.868 (0.033)	1.000	0.990	0.963	0.592	2.427
8. Denrées alimentaires	-0.075868 (0.100386)	0.144275 (0.099607)	3.60 (1.99)	0.939 (0.033)	1.000	0.990	0.965	0.732	1.437
Caractéristiques d'ensemble					0.999	0.982	0.947	S = 114.01	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\epsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\epsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\epsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $i' b^0 = 1$, $i' b^1 = 0$.

$\Pi_L(t/t-1)$ désigne l'indice des prix du type Laspeyres.

Tableau XX SLD $\{b_t = b^0 + b^1 \pi_L(t/t-1); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	b^0	b^1	c^0	c^1	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\bar{y}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.132554 (0.033772)	0.027144 (0.034050)	11.81 (1.38)	0.315 (0.076)	0.997	0.914	0.817	0.569	1.462
2. Communications	-0.009434 (0.003303)	0.012779 (0.002963)	-0.04 (0.03)	0.969 (0.035)	0.999	0.996	0.988	0.042	2.353
3. Loisirs	-0.137768 (0.022010)	0.150547 (0.021702)	0.38 (0.11)	0.876 (0.021)	0.999	0.994	0.935	0.144	1.768
4. Boissons, tabac	0.030321 (0.032415)	0.078404 (0.034501)	12.72 (1.64)	0.527 (0.056)	0.999	0.835	0.870	0.543	1.328
5. Divers	0.118086 (0.023660)	0.050285 (0.024995)	2.47 (0.80)	0.750 (0.034)	1.000	0.985	0.897	0.390	1.358
6. Transports	0.328278 (0.036815)	-0.056972 (0.033968)	-1.34 (0.51)	0.581 (0.052)	0.998	0.995	0.927	0.589	1.409
7. Dépenses pour le logement	0.561434 (0.055756)	-0.317393 (0.057377)	9.75 (1.69)	0.702 (0.037)	1.000	0.983	0.934	0.635	1.993
8. Dentrées alimentaires	-0.023472 (0.047010)	0.055206 (0.043730)	2.51 (1.78)	0.959 (0.031)	0.999	0.989	0.961	0.758	1.565
Caractéristiques d'ensemble					0.999	0.975	0.927	L**	-50.59

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\varepsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\varepsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\varepsilon_c^1 = 10^{-3}$.

Normalisation : $i^1 b^0 = 1$, $i^1 b^1 = 0$.

$\pi_L(t/t-1)$ désigne l'indice des prix du type Laspeyres.

Tableau XXI SLDG $\{c=c^0+c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	4.643746 (3.604177)	11.22 (1.77)	0.461 (0.086)	0.998	0.942	0.871	0.537	1.684
2. Communications	0.266184 (0.251133)	0.03 (0.08)	0.905 (0.101)	0.997	0.987	0.965	0.061	2.056
3. Loisirs	0.233408 (0.315763)	0.48 (0.34)	0.939 (0.061)	0.991	0.959	0.740	0.383	2.057
4. Boissons, tabac	2.764657 (2.212215)	10.29 (2.31)	0.669 (0.072)	0.999	0.876	0.897	0.537	1.636
5. Divers	4.277117 (3.313911)	2.61 (0.88)	0.858 (0.037)	0.999	0.987	0.916	0.407	1.435
6. Transports	7.499330 (5.863802)	1.35 (0.46)	0.712 (0.065)	0.999	0.997	0.960	0.507	1.851
7. Dépenses pour le logement	7.450537 (6.000112)	9.17 (2.91)	0.779 (0.063)	0.999	0.968	0.886	0.967	2.033
8. Denrées alimentaires	1.000000	2.28 (2.26)	0.970 (0.035)	0.999	0.987	0.961	0.762	1.623
Caractéristiques d'ensemble	$\hat{a} = 0.6715$ (0.2662)			0.999	0.976	0.930	S = 154.61	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_a = 10^{-4}$, $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$, $\epsilon_1 = 10^{-3}$.
Normalisation : $b_9 = 1$.

Tableau XXII SLDG { $c=c^0+c^1$ q_{t-1} } pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	$\tilde{b}$	$\tilde{c}^0$	$\tilde{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	3.742266 (1.970626)	12.55 (1.53)	0.360 (0.076)	0.997	0.926	0.839	0.562	1.478
2. Communications	0.038371 (0.044903)	0.00 (0.03)	1.007 (0.032)	0.998	0.993	0.982	0.052	2.258
3. Loisirs	0.279976 (0.202489)	0.70 (0.23)	0.890 (0.041)	0.991	0.957	0.677	0.381	1.977
4. Boissons, tabac	2.362013 (1.258136)	10.69 (1.69)	0.628 (0.054)	0.999	0.895	0.906	0.534	1.581
5. Divers	3.495669 (1.833258)	2.40 (0.72)	0.827 (0.030)	0.999	0.985	0.897	0.410	1.373
6. Transports	6.407735 (3.409939)	0.90 (0.45)	0.609 (0.053)	0.998	0.996	0.957	0.528	1.587
7. Dépenses pour le logement	5.414035 (2.928136)	7.52 (1.91)	0.781 (0.041)	0.999	0.968	0.885	0.981	1.989
8. Denrées alimentaires	1.000000 (2.01)	3.46 (2.01)	0.949 (0.032)	0.999	0.989	0.961	0.763	1.545
Caractéristiques d'ensemble	$\tilde{a} = 0.6271$ (0.1626)			0.999	0.977	0.926	$I^{**} = -116.30$	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_a = 10^{-4}$, $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$, $\epsilon_l = 10^{-3}$.

Normalisation : $b_g = 1$.

Tableau XXIII SIA $\{c = c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-U.
1. Habillement	-1.0593 (0.0901)	3.592402 (4.366292)	0.501 (0.072)	0.998	0.957	0.907	0.486	1.767
2. Communications	-0.1645 (0.2140)	0.003768 (0.005653)	0.700 (0.141)	0.996	0.976	0.911	0.069	1.638
3. Loisirs	-0.8879 (0.4029)	0.096552 (0.172957)	0.925 (0.059)	0.991	0.959	0.736	0.384	2.036
4. Boissons, tabac	-1.2393 (0.1470)	3.720219 (5.246187)	0.821 (0.049)	0.998	0.826	0.865	0.691	1.736
5. Divers	-0.5736 (0.1409)	0.275862 (0.349832)	0.792 (0.036)	0.999	0.988	0.918	0.395	1.382
6. Transports	0.1555 (0.0868)	0.015174 (0.020187)	0.571 (0.073)	0.999	0.997	0.966	0.455	1.914
7. Dépenses pour le logement	-1.0253 (0.1641)	5.586603 (7.373949)	0.625 (0.071)	0.999	0.970	0.888	0.873	2.053
8. Denrées alimentaires	-1.0877 (0.2172)	1.000000 (0.029)	0.966 (0.029)	0.999	0.989	0.963	0.759	1.600
Caractéristiques d'ensemble				0.999	0.974	0.930	S = 148.84	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_a = 10^{-4}$, $\varepsilon_b = 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 10^{-3}$.Normalisation : $b_8 = 1$.

Tableau XXIV SIA { $c_t=c+c^0+c^1$ q_{t-1} } pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	-0.7648 (0.1664)	0.013734 (0.015658)	4.85 (2.05)	0.478 (0.085)	0.998	0.946	0.875	0.529	1.630
2. Communications	-1.0830 (0.3821)	0.006334 (0.015321)	-0.84 (0.66)	0.868 (0.159)	0.996	0.976	0.904	0.070	1.540
3. Loisirs	-1.1483 (0.4619)	0.010311 (0.028263)	-0.61 (1.15)	0.917 (0.068)	0.991	0.959	0.734	0.383	2.043
4. Boissons, tabac	2.6736 (0.7464)	0.000000 (0.000000)	13.49 (2.60)	0.597 (0.076)	0.999	0.884	0.900	0.522	1.297
5. Divers	-0.1185 (0.3589)	0.000555 (0.000795)	1.65 (1.37)	0.809 (0.043)	0.999	0.987	0.913	0.397	1.416
6. Transports	0.3598 (0.1684)	0.000114 (0.000125)	0.82 (0.45)	0.566 (0.073)	0.999	0.998	0.975	0.419	1.963
7. Dépenses pour le logement	-0.2742 (0.3736)	0.002390 (0.004042)	9.39 (3.65)	0.653 (0.071)	0.999	0.969	0.888	0.906	1.880
8. Denrées alimentaires	-1.5594 (0.2342)	1.000000	-16.48 (5.99)	0.912 (0.047)	1.000	0.990	0.968	0.655	1.993
Caractéristiques d'ensemble					0.999	0.978	0.935	S =	132.63

(1) Critères de convergence : $\epsilon_a = 10^{-4}$, $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$, $\epsilon_l = 10^{-3}$.

Normalisation : $b_8 = 1$.

Tableau XXV SLDS pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des moindres carrés simples

Rubriques	$\hat{b}^0$	$\hat{b}^1$	$\hat{c}^0$	$\hat{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.144684 (0.019826)	0.045493 (0.042457)	14.81 (3.00)	0.281 (0.141)	0.998	0.968	0.870	0.505	1.653
2. Communications	0.002822 (0.004341)	0.001717 (0.003503)	0.06 (0.10)	0.947 (0.120)	0.998	0.996	0.978	0.050	2.198
3. Loisirs	-0.004913 (0.014869)	0.015640 (0.014412)	0.62 (0.33)	0.913 (0.058)	0.991	0.979	0.703	0.376	1.977
4. Boissons, tabac	0.084254 (0.019003)	-0.007588 (0.026754)	10.48 (2.62)	0.668 (0.082)	0.999	0.911	0.869	0.578	1.618
5. Divers	0.146668 (0.016225)	-0.016529 (0.032526)	3.37 (1.25)	0.835 (0.046)	1.000	0.994	0.918	0.404	1.446
6. Transports	0.248459 (0.022996)	-0.091135 (0.064315)	0.71 (0.59)	0.826 (0.083)	0.998	0.998	0.944	0.547	1.924
7. Dépenses pour le logement	0.276595 (0.036252)	-0.017477 (0.079063)	13.95 (4.06)	0.689 (0.081)	0.999	0.985	0.891	0.931	2.005
8. Denrées alimentaires	0.101431 (0.028049)	-0.114898 (0.027792)	-0.63 (2.05)	1.019 (0.031)	1.000	0.995	0.968	0.674	1.600
Caractéristiques d'ensemble	$\hat{u}_1 = 2.32108$ (4.92980)				0.999	0.987	0.928	S = 145.94	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_b^0 = 10^{-6}$, $\varepsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\varepsilon_c^0 = 10^{-2}$, $\varepsilon_c^1 = 10^{-3}$, $\varepsilon_u^1 = 10^{-5}$.

Normalisation : $u^0 b^0 = 1$.

Tableau XXVI SLDS pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Rubriques	$\tilde{b}^o$	$\tilde{b}^1$	$\tilde{c}^o$	$\tilde{c}^1$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\tilde{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.175430 (0.017698)	-0.154009 (0.020433)	12.06 (2.02)	0.429 (0.098)	0.998	0.961	0.907	0.511	1.653
2. Communications	0.002341 (0.001074)	0.000219 (0.001219)	0.16 (0.06)	0.807 (0.062)	0.999	0.994	0.983	0.044	2.381
3. Loisirs	0.020078 (0.006899)	-0.016652 (0.007139)	0.57 (0.18)	0.884 (0.035)	0.992	0.966	0.797	0.350	1.979
4. Boissons, tabac	0.150480 (0.015913)	-0.144294 (0.015889)	6.34 (1.54)	0.789 (0.049)	0.996	0.891	0.851	0.999	2.171
5. Divers	0.158854 (0.014617)	-0.140293 (0.016429)	3.22 (1.10)	0.849 (0.043)	1.000	0.985	0.899	0.378	1.390
6. Transports	0.195039 (0.015606)	-0.140196 (0.019053)	2.21 (0.64)	0.609 (0.079)	0.998	0.995	0.949	0.591	1.565
7. Dépenses pour le logement	0.199114 (0.031235)	-0.181547 (0.033191)	7.73 (2.36)	0.848 (0.045)	0.998	0.961	0.868	1.213	2.016
8. Denrées alimentaires	0.098663 (0.026180)	-0.107916 (0.027446)	-1.45 (2.36)	1.030 (0.036)	1.000	0.990	0.965	0.712	1.494
Caractéristiques d'ensemble	$\tilde{u}_1 = -9.47750$ (6.55145)				0.999	0.977	0.923	L** = -82.94	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_b^o = 10^{-6}$, $\varepsilon_b^1 = 10^{-6}$, $\varepsilon_c^o = 10^{-2}$, $\varepsilon_c^1 = 10^{-3}$, $\varepsilon_\mu^1 = 10^{-5}$.

Normalisation : $u^1 b^o = 1$.

Tableau XXVII SLDS pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Paramètres de la forme structurelle (1)

Rubriques	Estimation des moindres carrés simples			Estimation du maximum de vraisemblance		
	$\hat{\gamma}$	$\hat{k}$	$\hat{c}^*$	$\tilde{\gamma}$	$\tilde{k}$	$\tilde{c}^*$
1. Habillement	-0.314	0.595	11.27	0.878	-0.448	98.74
2. Communications	-0.609	1.555	0.04	-0.094	0.901	0.14
3. Loisirs	3.183	-2.270	-0.28	0.829	0.055	3.36
4. Boissons, tabac	0.090	0.577	11.52	0.959	-0.169	154.30
5. Divers	0.113	0.722	3.80	0.883	-0.033	27.52
6. Transports	0.367	0.458	1.12	0.719	-0.110	7.85
7. Dépenses pour le logement	0.063	0.626	14.89	0.912	-0.063	87.56
8. Denrées alimentaires	1.133	-0.113	4.72	1.094	-0.063	15.48

(1) On a : $\gamma = - (b^0)^{-1} b^1$, $k = c^1 - \gamma$ et $c^* = (I - \gamma)^{-1} c^0$.

Tableau XXVIII SAD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des quasi-moindres carrés

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.078239 (0.002372)	19.06 (0.74)	0.997	0.909	0.806	0.567	1.486
2. Communications	0.015080 (0.001338)	0.61 (0.18)	0.997	0.980	0.917	0.065	1.155
3. Loisirs	0.049656 (0.006676)	4.13 (0.72)	0.999	0.993	0.929	0.144	2.288
4. Boissons, tabac	0.052946 (0.008817)	31.17 (0.79)	0.999	0.833	0.878	0.536	1.416
5. Divers	0.178361 (0.018679)	17.81 (3.50)	1.000	0.990	0.933	0.347	2.213
6. Transports	0.206724 (0.009815)	0.59 (1.70)	0.998	0.995	0.924	0.555	1.298
7. Dépenses pour le logement	0.219272 (0.023962)	40.46 (4.65)	0.999	0.974	0.890	0.690	1.791
8. Denrées alimentaires	0.199722 (0.031484)	64.74 (3.29)	0.999	0.981	0.921	0.814	1.047
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.971	0.904	S = 127.67	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $\epsilon' b = 1$.

Tableau XXIX SAD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

Estimation de la matrice D par la méthode des quasi-moindres carrés

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Habillement	0.962	2.070	0.112	0.011	-0.120	-0.112	0.142	-0.090
2. Communications	-0.015	0.551	-0.004	0.015	-0.009	-0.000	0.018	0.001
3. Loisirs	-0.069	-0.457	0.130	0.143	-0.007	-0.038	0.073	0.040
4. Boissons, tabac	-0.127	-3.440	0.981	0.851	-0.075	-0.271	0.354	0.054
5. Divers	0.128	0.858	0.488	0.150	0.296	0.233	0.036	0.075
6. Transports	-0.013	2.330	0.103	-0.166	0.237	0.528	-0.043	0.088
7. Dépenses pour le logement	-0.062	3.349	0.241	-0.076	0.267	0.377	0.285	0.186
8. Denrées alimentaires	0.197	-4.261	-1.051	0.071	0.412	0.284	0.135	0.646

Tableau XXX SAD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.078515 (0.002175)	22.44 (0.40)	0.998	0.967	0.865	0.526	1.614
2. Communications	0.017315 (0.000907)	1.14 (0.10)	0.998	0.995	0.971	0.053	1.466
3. Loisirs	0.058519 (0.009573)	5.87 (0.45)	0.999	0.998	0.948	0.132	2.392
4. Boissons, tabac	0.043402 (0.012007)	33.81 (0.54)	0.999	0.943	0.911	0.546	1.463
5. Divers	0.151891 (0.018168)	27.75 (1.53)	1.000	0.995	0.938	0.339	2.105
6. Transports	0.230778 (0.011887)	8.42 (1.12)	0.998	0.997	0.911	0.566	1.374
7. Dépenses pour le logement	0.179225 (0.018559)	53.64 (1.77)	0.999	0.989	0.909	0.661	1.693
8. Denrées alimentaires	0.240356 (0.031443)	70.54 (1.67)	0.999	0.992	0.936	0.796	1.053
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.989	0.921	L** =	-34.44

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $\hat{b} = 1$.

Tableau XXXI SAD pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

Estimation de la matrice D par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Habillement	0.981	1.817	0.223	-0.019	-0.115	-0.126	0.154	-0.089
2. Communications	-0.009	0.604	-0.007	0.013	-0.016	-0.009	0.027	-0.002
3. Loisirs	-0.066	-0.398	0.210	0.138	-0.017	-0.045	0.083	0.026
4. Boissons, tabac	-0.131	-4.225	1.487	0.784	-0.024	-0.252	0.343	0.014
5. Divers	0.120	0.376	0.409	0.143	0.342	0.258	0.015	0.095
6. Transports	0.011	2.884	-0.319	-0.148	0.263	0.465	-0.036	0.119
7. Dépenses pour le logement	0.028	5.284	-0.049	-0.066	0.181	0.183	0.397	0.151
8. Denrées alimentaires	0.067	-5.341	-0.955	0.154	0.386	0.526	0.017	0.686

Tableau XXXII SAQ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation par la méthode des quasi-moindres carrés

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.065927 (0.005536)	19.85 (0.95)	0.998	0.938	0.868	0.453	1.585
2. Communications	0.017178 (0.001024)	0.11 (0.17)	0.998	0.991	0.972	0.052	1.867
3. Loisirs	0.035476 (0.009530)	4.49 (0.96)	0.994	0.973	0.798	0.311	2.178
4. Boissons, tabac	0.065145 (0.007970)	30.01 (0.94)	0.999	0.927	0.937	0.486	2.008
5. Divers	0.200024 (0.011705)	15.30 (1.88)	1.000	0.993	0.950	0.319	1.835
6. Transports	0.203346 (0.012040)	-0.04 (1.40)	0.998	0.995	0.942	0.526	1.456
7. Dépenses pour le logement	0.238479 (0.026236)	37.45 (3.66)	0.999	0.972	0.895	0.821	2.262
8. Denrées alimentaires	0.174426 (0.034730)	62.68 (3.06)	1.000	0.990	0.968	0.632	1.894
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.982	0.940	S = 115.61	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $u' b = 1$.

Tableau XXXIII SAQ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

Estimation de la matrice Q par la méthode des quasi-moindres carrés

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Habillement	0.520	3.075	0.304	0.231	-0.104	-0.146	0.296	-0.029
2. Communications	0.005	0.488	-0.035	-0.005	-0.000	0.010	-0.004	0.005
3. Loisirs	0.030	1.292	-0.062	-0.098	-0.045	0.134	-0.115	-0.028
4. Boissons, tabac	-0.148	-0.027	0.607	0.583	-0.129	0.027	0.248	0.008
5. Divers	0.283	1.746	0.283	0.042	0.318	0.121	0.020	0.042
6. Transports	0.072	-1.170	0.017	0.034	0.276	0.633	0.075	0.341
7. Dépenses pour le logement	-0.141	-2.857	0.410	0.369	0.382	-0.047	0.631	0.428
8. Denrées alimentaires	0.381	-1.547	-0.524	-0.156	0.302	0.267	-0.151	0.232

Estimation par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_u$	D.-W.
1. Habillement	0.074519 (0.003498)	22.30 (0.42)	0.999	0.952	0.901	0.405	1.925
2. Communications	0.016362 (0.000725)	1.08 (0.09)	0.998	0.990	0.972	0.052	1.983
3. Loisirs	0.038447 (0.009594)	6.14 (0.39)	0.992	0.964	0.747	0.352	2.129
4. Boissons, tabac	0.057108 (0.009724)	34.03 (0.61)	0.999	0.927	0.934	0.524	1.884
5. Divers	0.190575 (0.011505)	25.41 (0.99)	1.000	0.993	0.949	0.321	1.794
6. Transports	0.227468 (0.012203)	7.16 (0.84)	0.999	0.996	0.940	0.459	1.616
7. Dépenses pour le logement	0.215826 (0.022073)	50.28 (1.53)	0.999	0.970	0.890	0.870	2.132
8. Denrées alimentaires	0.179694 (0.035368)	71.58 (1.60)	1.000	0.989	0.964	0.670	1.649
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.981	0.938	$I^{**} = -53.54$	

(1) Critères de convergence : $\epsilon_b = 10^{-6}$, $\epsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $u' b = 1$.

Tableau XXXV SAQ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

Estimation de la matrice Q par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Habillement	0.529	3.955	0.616	0.269	-0.194	-0.258	0.436	-0.096
2. Communications	0.007	0.559	-0.042	0.001	-0.010	0.005	0.003	0.003
3. Loisirs	0.020	1.179	-0.090	-0.013	-0.068	0.085	-0.075	-0.016
4. Boissons, tabac	-0.165	-1.377	0.906	0.601	-0.064	-0.016	0.297	0.027
5. Divers	0.354	1.407	0.104	-0.047	0.347	0.185	-0.046	0.052
6. Transports	0.199	-1.717	-0.687	-0.142	0.405	0.790	-0.158	0.428
7. Dépenses pour le logement	-0.182	-0.869	0.586	0.319	0.312	-0.068	0.675	0.351
8. Denrées alimentaires	0.236	-2.136	-0.392	0.013	0.273	0.277	-0.133	0.252

Tableau XXXVI SAR pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)

Estimation (2) par la méthode des quasi-moindres carrés

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	D. -W.
1. Habillement	0.075538 (0.003452)	19.31 (0.70)	0.998	0.925	0.832	0.534	1.581
2. Communications	0.015749 (0.000950)	0.28 (0.19)	0.995	0.981	0.936	0.078	1.301
3. Loisirs	0.047251 (0.005599)	4.36 (0.59)	0.993	0.972	0.835	0.329	2.199
4. Poissons, tabac	0.039141 (0.007913)	32.86 (0.88)	0.999	0.915	0.927	0.529	2.002
5. Divers	0.167778 (0.007072)	19.96 (1.59)	1.000	0.989	0.938	0.381	1.662
6. Transports	0.216493 (0.006829)	-1.19 (1.57)	0.999	0.997	0.955	0.479	1.731
7. Dépenses pour le logement	0.252343 (0.012896)	36.34 (3.23)	0.999	0.977	0.916	0.785	2.208
8. Denrées alimentaires	0.185707 (0.014613)	62.95 (2.09)	1.000	0.992	0.970	0.599	1.584
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.982	0.941	S = 117.62	

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_b = 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 10^{-2}$.Normalisation : $b = 1$.

(2) Source : cf. [9].

Tableau XXXVII SAR pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67
Estimation (1) de la matrice $\bar{R} = P R \bar{P}$ par la méthode des quasi-moindres carrés

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7
1. Habillement	0.246	-2.151	-0.360	-0.258	0.037	0.091	-0.309
2. Communications	0.030	0.461	0.026	-0.007	0.015	0.003	-0.003
3. Loisirs	0.115	-0.292	1.035	0.015	0.065	-0.059	0.079
4. Boissons, tabac	0.048	0.904	-0.620	0.532	0.074	-0.067	-0.176
5. Divers	-0.133	-1.058	-0.340	-0.041	0.814	-0.155	0.067
6. Transports	0.139	0.285	0.141	0.181	0.018	0.851	0.089
7. Dépenses pour le logement	0.347	0.539	-0.088	0.047	-0.017	0.260	0.773

(1) Source : cf. [9].

Tableau XXXVIII SAR pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67 (1)
Estimation (2) par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	$\hat{b}$	$\hat{c}$	R_d^2	R_q^2	R_w^2	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	D.-W.
1. Habillement	0.078678 (0.002490)	21.92 (0.38)	0.998	0.944	0.876	0.487	1.717
2. Communications	0.016074 (0.000476)	1.03 (0.08)	0.997	0.983	0.944	0.065	1.887
3. Loisirs	0.043660 (0.003758)	5.69 (0.32)	0.992	0.964	0.786	0.364	2.187
4. Boissons, tabac	0.056307 (0.006079)	33.53 (0.52)	0.999	0.925	0.936	0.523	1.892
5. Divers	0.178399 (0.004860)	26.51 (0.86)	1.000	0.992	0.949	0.352	1.901
6. Transports	0.234078 (0.005703)	7.51 (0.86)	0.999	0.996	0.947	0.477	1.665
7. Dépenses pour le logement	0.209693 (0.010063)	52.10 (1.37)	0.999	0.977	0.916	0.866	2.078
8. Denrées alimentaires	0.183111 (0.011777)	69.17 (1.22)	1.000	0.990	0.968	0.658	1.535
Caractéristiques d'ensemble			0.999	0.983	0.943	L** =	-68.86

(1) Critères de convergence : $\varepsilon_b = 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 10^{-2}$.

Normalisation : $b = 1$.

(2) Source : cf. [9].

Tableau XXXIX SAR pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67
 Estimation (1) de la matrice $\bar{R} = P \bar{R} \bar{P}$ par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7
1. navillement	0.231	-3.079	-0.704	-0.317	0.053	0.175	-0.489
2. Communications	0.024	0.435	0.031	-0.010	0.022	0.006	-0.011
3. Loisirs	0.107	-0.227	1.085	0.008	0.068	-0.035	0.077
4. Boissons, tabac	0.071	2.146	-0.942	0.491	0.018	0.021	-0.251
5. Divers	-0.202	-1.142	-0.050	0.087	0.769	-0.170	0.142
6. Transports	0.148	0.281	0.625	0.304	0.039	0.744	0.276
7. Dépenses pour le logement	0.294	-1.314	-0.393	-0.107	0.035	0.286	0.574

(1) Source : cf. [9].

Tableau XL SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

Matrice des variances et des covariances des erreurs résiduelles
Estimation du maximum de vraisemblance $\hat{\Omega}^{(1)}$

Rubriques	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Habillement	0.299							
2. Communications	0.003	0.003						
3. Loisirs	0.022	0.011	0.145					
4. Boissons, tabac	0.055	-0.000	0.040	0.316				
5. Divers	-0.072	0.005	0.012	-0.020	0.165			
6. Transports	-0.161	-0.002	-0.052	-0.029	0.003	0.354		
7. Dépenses pour le logement	-0.058	-0.020	-0.264	-0.296	-0.106	0.115	0.934	
8. Denrées alimentaires	-0.088	-0.000	0.087	-0.064	0.013	-0.228	-0.305	0.584

(1) Estimation du maximum de vraisemblance des paramètres b^0, c^0 et c^1 : voir tableau XIV.

Tableau XLI Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres b^0 du système SLD $\{b = b^0; c = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	b^0	$\bar{b}^0$	$\frac{\bar{b}^0 - b^0}{b^0}$	$s(\hat{b}^0 - \bar{b}^0)$	$s(\hat{b}^0 - b^0)$
1. Habillement	0.168815	0.161476	-0.0435	0.019835	0.021149
2. Communications	0.002553	0.005041	0.9743	0.004502	0.005144
3. Loisirs	0.014226	0.019247	0.3529	0.008789	0.010122
4. Boissons, tabac	0.114024	0.105521	-0.0746	0.015015	0.017255
5. Divers	0.159106	0.155377	-0.0234	0.015787	0.016222
6. Transports	0.261848	0.256856	-0.0191	0.018205	0.018877
7. Dépenses pour le logement	0.230163	0.231689	0.0066	0.030272	0.030310
8. Denrées alimentaires	0.049264	0.064794	0.3152	0.021499	0.026521

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;

100 échantillons, $T = 58$;

les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{t-t'}$;

la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau XLII Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres c^0 du système SLD $\{b_t^0; c_t^0 + c_t^1 q_{t-1}\}^{(1)}$

Rubriques	c^0	$\bar{c}^0$	$\frac{\bar{c}^0 - c^0}{c^0}$	$s(\bar{c}^0 - \bar{c}^0)$	$s(\bar{c}^0 - c^0)$
1. Habillement	10.89	12.56	0.1535	1.78	2.44
2. Communications	-0.01	0.01	-2.9114	0.14	0.14
3. Loisirs	0.60	1.02	0.7039	0.50	0.65
4. Boissons, tabac	11.80	13.46	0.1407	2.60	3.09
5. Divers	1.82	2.49	0.3727	0.96	1.17
6. Transports	-0.97	-1.04	0.0732	0.91	0.91
7. Dépenses pour le logement	7.37	9.22	0.2508	2.75	3.31
8. Denrées alimentaires	3.50	7.94	1.2657	3.71	5.78 ~

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, T = 58 ;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{t\bar{t}} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau XLIII Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres c^1 du système SLD $\{b_t^0; c_t + c_t^1 q_{t-1}^1\}$ (1)

Rubriques	c^1	$\frac{\bar{c}^1}{c}$	$\frac{\bar{c}^1 - c^1}{c}$	$s(\hat{c}^1 - \bar{c}^1)$	$s(\hat{c}^1 - c^1)$
1. Habillement	0.383	0.294	-0.2322	0.097	0.131
2. Communications	0.992	0.918	-0.0750	0.102	0.126
3. Loisirs	0.885	0.800	-0.0966	0.080	0.117
4. Boissons, tabac	0.572	0.519	-0.0938	0.080	0.097
5. Divers	0.813	0.771	-0.0519	0.040	0.058
6. Transports	0.667	0.603	-0.0952	0.055	0.084
7. Dépenses pour le logement	0.768	0.713	-0.0715	0.065	0.085
8. Denrées alimentaires	0.943	0.876	-0.0708	0.055	0.086

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, $T = 58$;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{t\tau} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau XLIV Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres σ_u du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	σ_u	$\frac{\bar{\sigma}_u - \sigma_u}{\sigma_u}$	$s(\bar{\sigma}_u - \sigma_u)$	$s(\hat{\sigma}_u - \sigma_u)$
1. Habillement	0.547	0.531	-0.0289	0.058
2. Communications	0.052	0.052	0.0175	0.006
3. Loisirs	0.381	0.371	-0.0269	0.037
4. Boissons, tabac	0.562	0.540	-0.0387	0.054
5. Divers	0.406	0.392	-0.0341	0.040
6. Transports	0.595	0.566	-0.0486	0.059
7. Dépenses pour le logement	0.967	0.916	-0.0518	0.098
8. Dénrées alimentaires	0.764	0.734	-0.0398	0.073

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;

100 échantillons, T = 58 ;

les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{t\tau} \Omega$;

la matrice Ω est donnée au tableau XL .

Tableau XLV Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres σ_b^0 du système SLD $\{b_t=b^0; c_t=c^0+v^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	$\hat{\sigma}_b^0$	$\tilde{\sigma}_b^0$	$\frac{\tilde{\sigma}_b^0 - \sigma_b^0}{\sigma_b^0}$	$s(\hat{\sigma}_b^0 - \tilde{\sigma}_b^0)$	$s(\hat{\sigma}_b^0 - \sigma_b^0)$
1. Habillement	0.018420	0.017839	-0.0316	0.001731	0.001826
2. Communications	0.005339	0.004336	-0.1823	0.001216	0.001558
3. Loisirs	0.009665	0.007738	-0.1933	0.002026	0.002796
4. Boissons, tabac	0.015875	0.014326	-0.0976	0.001989	0.002521
5. Divers	0.015685	0.015042	-0.0410	0.001476	0.001610
6. Transports	0.023106	0.019578	-0.1547	0.001657	0.003947
7. Dépenses pour le logement	0.032106	0.030233	-0.0583	0.003047	0.003572
8. Denrées alimentaires	0.024968	0.020239	-0.1894	0.005072	0.006935

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, T = 58 ;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau XLVI Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres $\sigma_{\epsilon^0}^2$ du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	$\sigma_{\epsilon^0}^2$	$\bar{\sigma}_{\epsilon^0}^2$	$\frac{\bar{\sigma}_{\epsilon^0}^2 - \sigma_{\epsilon^0}^2}{\sigma_{\epsilon^0}^2}$	$s(\hat{\sigma}_{\epsilon^0}^2 - \bar{\sigma}_{\epsilon^0}^2)$	$s(\hat{\sigma}_{\epsilon^0}^2 - \sigma_{\epsilon^0}^2)$
1. Habillement	1.69	1.88	0.1130	0.16	0.25
2. Communications	0.05	0.09	0.9432	0.04	0.06
3. Loisirs	0.30	0.42	0.4277	0.11	0.17
4. Boissons, tabac	2.29	2.32	0.0140	0.28	0.28
5. Divers	0.96	0.90	-0.0598	0.11	0.13
6. Transports	0.63	0.68	0.0767	0.08	0.09
7. Dépenses pour le logement	2.77	2.66	-0.0408	0.45	0.46
8. Denrées alimentaires	2.15	3.36	0.5660	0.82	1.47

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1];

100 échantillons, $T = 58$;

les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{t\tau} \Omega$;

la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau XLVII Analyse par simulation des estimateurs des moindres carrés simples
Paramètres σ_c^1 du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	σ_c^1	$\frac{\bar{\sigma}_c^1}{\sigma_c^1}$	$\frac{\bar{\sigma}_c^1 - \sigma_c^1}{\sigma_c^1}$	$s(\hat{\sigma}_c^1 - \sigma_c^1)$	$s(\hat{\sigma}_c^1 - \sigma_c^1)$
1. Habillement	0.089	0.099	0.1050	0.009	0.013
2. Communications	0.102	0.103	0.0088	0.030	0.030
3. Loisirs	0.063	0.078	0.2383	0.015	0.021
4. Boissons, tabac	0.074	0.074	0.0002	0.011	0.011
5. Divers	0.040	0.041	0.0393	0.005	0.005
6. Transports	0.068	0.064	-0.0559	0.006	0.007
7. Dépenses pour le logement	0.062	0.064	0.0305	0.010	0.010
8. Denrées alimentaires	0.037	0.052	0.4054	0.012	0.019

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, T = 58 ;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u'_\tau) = \delta_{t\tau} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL .

Tableau XLVIII

Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance
Paramètres b^0 du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	b^0	$\bar{b}^0$	$\frac{\bar{b}^0 - b^0}{b^0}$	$s(\bar{b}^0 - \bar{b}^0)$	$s(\bar{b}^0 - b^0)$
1. Habillement	0.168815	0.164306	-0.0267	0.019389	0.019906
2. Communications	0.002553	0.003889	0.5229	0.001486	0.001998
3. Loisirs	0.014226	0.016992	0.1944	0.006489	0.007034
4. Boissons, tabac	0.114024	0.105565	-0.0742	0.013502	0.015933
5. Divers	0.159106	0.160502	0.0088	0.014783	0.014849
6. Transports	0.261848	0.260196	-0.0063	0.019190	0.019261
7. Dépenses pour le logement	0.230163	0.225884	-0.0186	0.024613	0.024982
8. Denrées alimentaires	0.049264	0.062667	0.2721	0.019756	0.023873

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;

100 échantillons, $T = 58$;

les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega$;

la matrice Ω est donnée au tableau XL .

Tableau XLIX Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance
Paramètres c^0 du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	c^0	$\frac{\bar{c}^0}{c^0}$	$\frac{\bar{c}^0 - c^0}{c^0}$	$s(\bar{c}^0 - c^0)$	$s(c^0 - c^0)$
1. Habillement	10.89	12.43	0.1417	1.73	2.32
2. Communications	-0.01	0.01	-2.9513	0.06	0.07
3. Loisirs	0.60	0.87	0.4624	0.34	0.44
4. Boissons, tabac	11.80	12.93	0.0958	2.05	2.34
5. Divers	1.82	2.58	0.4209	0.95	1.22
6. Transports	-0.97	-0.97	-0.0056	0.78	0.78
7. Dépenses pour le logement	7.37	8.73	0.1845	2.43	2.79
8. Denrées alimentaires	3.50	7.32	1.0903	3.41	5.12

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, $T = 58$;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{tt}$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau L Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance
Paramètres c^1 du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	c^1	$\frac{z^1}{c}$	$\frac{z^1 - c^1}{\frac{1}{c}}$	$s(\frac{z^1}{c} - \frac{z^1}{c})$	$s(\frac{z^1}{c} - c^1)$
1. Habillement	0.383	0.303	-0.2070	0.095	0.123
2. Communications	0.992	0.950	-0.0427	0.029	0.051
3. Loisirs	0.885	0.832	-0.0607	0.048	0.072
4. Boissons, tabac	0.572	0.537	-0.0612	0.064	0.073
5. Divers	0.813	0.770	-0.0533	0.038	0.058
6. Transports	0.667	0.612	-0.0820	0.054	0.077
7. Dépenses pour le logement	0.768	0.731	-0.0477	0.050	0.062
8. Denrées alimentaires	0.943	0.886	-0.0601	0.049	0.075

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, T = 58 ;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u'_\tau) = \delta_{t\tau} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau LI Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance
paramètres σ_u du système SLD $\{b_t^0; c_t^0 + c^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	σ_u	$\frac{\bar{z}}{\sigma_u}$	$\frac{\bar{z} - \sigma_u}{\sigma_u}$	$s(\bar{\sigma}_u - \sigma_u)$	$s(\bar{\sigma}_u - \sigma_u)$
1. Habillement	0.547	0.533	-0.0254	0.057	0.059
2. Communications	0.052	0.050	-0.0333	0.004	0.005
3. Loisirs	0.381	0.372	-0.0229	0.036	0.037
4. Boissons, tabac	0.562	0.544	-0.0318	0.049	0.052
5. Divers	0.406	0.390	-0.0395	0.037	0.040
6. Transports	0.595	0.571	-0.0402	0.053	0.059
7. Dépenses pour le logement	0.967	0.930	-0.0378	0.088	0.096
8. Dentrées alimentaires	0.764	0.736	-0.0367	0.067	0.073

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, T = 58 ;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{t\tau} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau III Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance
Paramètres $\sigma_{b^0}^2$ du système SLD $\{b_t^0 = b^0; c_t = c^0 + \varepsilon_t^1, q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	$\sigma_{b^0}^2$	$\tilde{\sigma}_{b^0}^2$	$\frac{\tilde{\sigma}_{b^0}^2 - \sigma_{b^0}^2}{\sigma_{b^0}^2}$	$s(\tilde{\sigma}_{b^0}^2 - \tilde{\sigma}_{b^0}^2)$	$s(\tilde{\sigma}_{b^0}^2 - \sigma_{b^0}^2)$
1. Habillement	0.016084	0.014678	-0.0874	0.001442	0.002013
2. Communications	0.001853	0.001306	-0.2950	0.000230	0.000593
3. Loisirs	0.007559	0.005643	-0.2535	0.001170	0.002245
4. Boissons, tabac	0.013333	0.011529	-0.1353	0.001724	0.002495
5. Divers	0.013589	0.012682	-0.0668	0.001282	0.001571
6. Transports	0.020556	0.016697	-0.1877	0.001316	0.004078
7. Dépenses pour le logement	0.023648	0.020714	-0.1241	0.001858	0.003473
8. Denrées alimentaires	0.022263	0.017036	-0.2348	0.004143	0.006670

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;

100 échantillons, T = 58;

les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{tt'} \Omega$;

la matrice Ω est donnée au tableau XL .

Tableau LIII Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance
Paramètres σ_c^0 du système SLD $\{b_t^0; c_t^0 + c_t^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	σ_c^0	$\tilde{\sigma}_c^0$	$\frac{\tilde{\sigma}_c^0 - \sigma_c^0}{\sigma_c^0}$	$s(\tilde{\sigma}_c^0 - \sigma_c^0)$	$s(\tilde{\sigma}_c^0 - \sigma_c^0)$
1. Habillement	1.40	1.45	0.0424	0.12	0.13
2. Communications	0.04	0.04	0.1837	0.01	0.01
3. Loisirs	0.23	0.28	0.2097	0.05	0.07
4. Boissons, tabac	1.66	1.64	-0.0092	0.21	0.21
5. Divers	0.82	0.73	-0.1152	0.08	0.12
6. Transports	0.54	0.53	-0.0083	0.05	0.05
7. Dépenses pour le logement	2.08	1.83	-0.1176	0.25	0.35
8. Denrées alimentaires	1.87	2.69	0.4330	0.63	1.02

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, $T = 58$;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{tt'} \Omega$;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

Tableau LIV

Analyse par simulation des estimateurs du maximum de vraisemblance

Paramètres σ_c^1 du système SLD $\{b = b_t^0; c = c_t^0 + c_t^1 q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	σ_c^1	$\bar{\sigma}_c^1$	$\frac{\bar{\sigma}_c^1 - \sigma_c^1}{\sigma_c^1}$	$s(\bar{\sigma}_c^1 - \bar{\sigma}_c^1)$	$s(\bar{\sigma}_c^1 - \sigma_c^1)$
1. Habillement	0.074	0.076	0.0272	0.006	0.007
2. Communications	0.034	0.028	-0.1615	0.005	0.007
3. Loisirs	0.040	0.043	0.0780	0.008	0.008
4. Boissons, tabac	0.054	0.052	-0.0348	0.008	0.008
5. Divers	0.032	0.032	0.0022	0.004	0.004
6. Transports	0.053	0.049	-0.0904	0.004	0.007
7. Dépenses pour le logement	0.042	0.040	-0.0571	0.005	0.006
8. Denrées alimentaires	0.032	0.041	0.2858	0.009	0.013

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;

100 échantillons, T = 58;

les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_\tau') = \delta_{t\tau} \Omega$;la matrice Ω est donnée au tableau XL .

Tableau LV Analyse par simulation de la statistique de Durbin-Watson
Estimation du système SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + \varepsilon_t^j, q_{t-1}\}$ (1)

Rubriques	Estimation des moindres carrés simples				Estimation du maximum de vraisemblance			
	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
1. Habillement	1.889	-0.0553	0.214	0.240	1.901	-0.0494	0.233	0.253
2. Communications	1.884	-0.0581	0.290	0.312	2.020	0.0099	0.240	0.241
3. Loisirs	1.942	-0.0291	0.230	0.237	1.991	-0.0046	0.273	0.273
4. Boissons, tabac	1.976	-0.0119	0.232	0.233	1.992	-0.0038	0.259	0.259
5. Divers	1.975	-0.0125	0.233	0.234	1.983	-0.0083	0.235	0.236
6. Transports	1.964	-0.0180	0.292	0.294	1.960	-0.0200	0.293	0.296
7. Dépenses pour le logement	2.023	0.0115	0.233	0.234	2.017	0.0085	0.256	0.256
8. Denrées alimentaires	1.970	-0.0149	0.222	0.224	1.978	-0.0111	0.232	0.233

(1) Variables exogènes : Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67, cf. [1] ;
100 échantillons, T = 58 ;
les résidus aléatoires u_t sont normaux, avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t u_t') = \delta_{tt} \Omega$ ($E(D \cdot W_t) = 2$) ;
la matrice Ω est donnée au tableau XL.

On désigne par (a), (b), (c) et (d) la moyenne $\overline{(B \cdot W_t)}$, le biais relatif $\frac{\overline{(D \cdot W_t)} - 2}{2}$ et les écarts quadratiques

Figure I Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67

Consommation en volume, par tête
(en livres 1958)

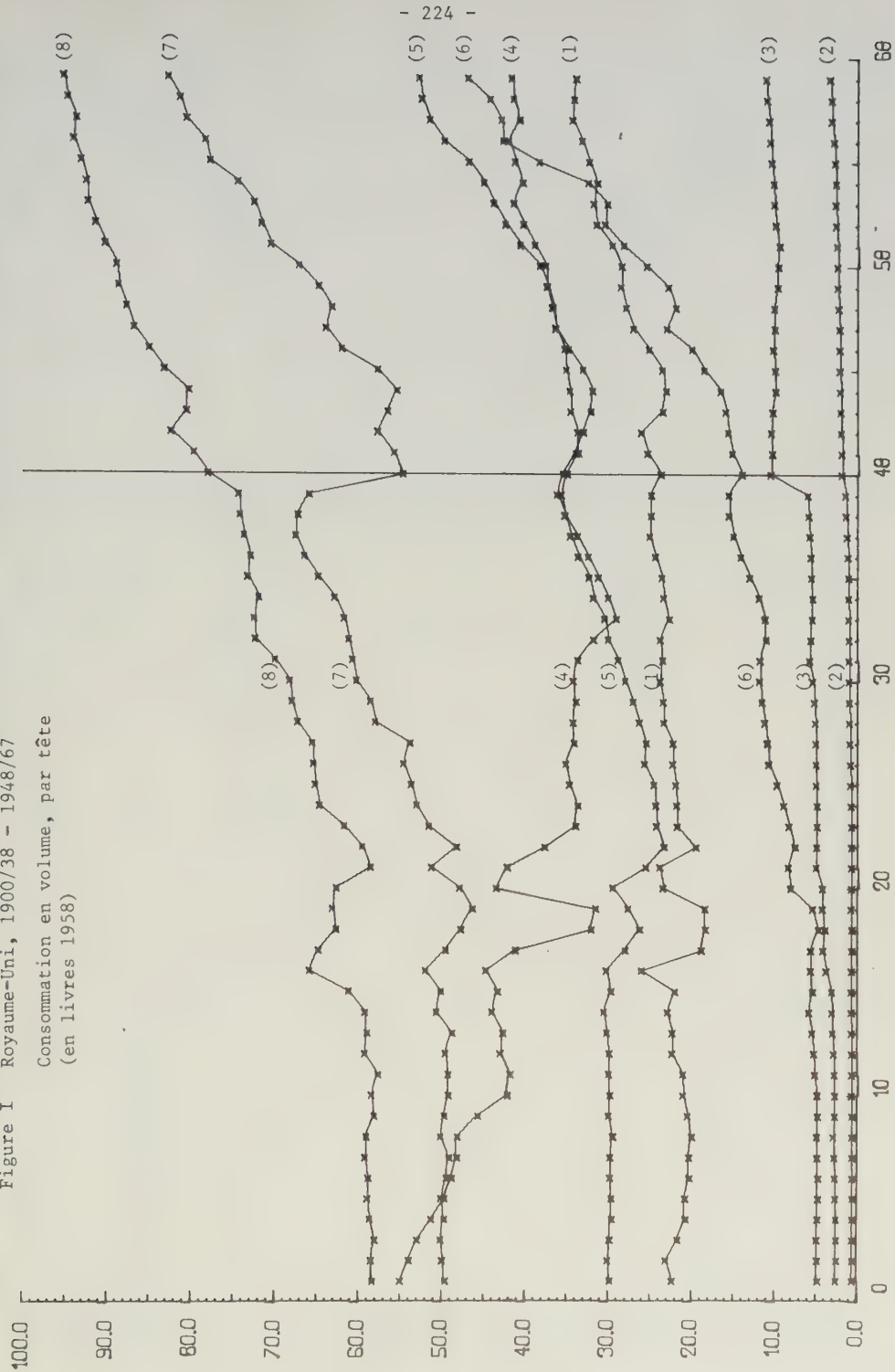


Figure II-1 Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67

Prix implicites nominaux
(base 1958)

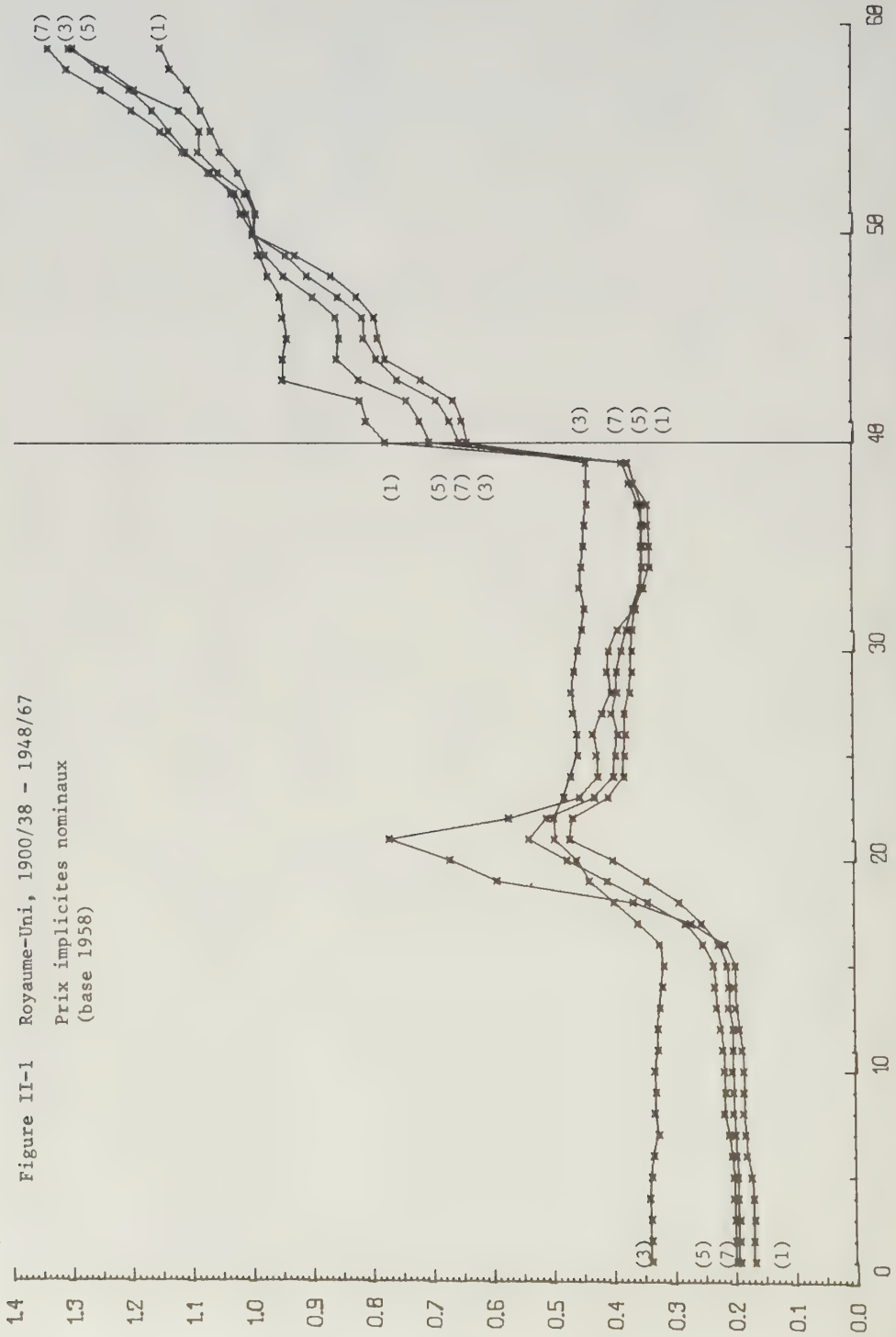
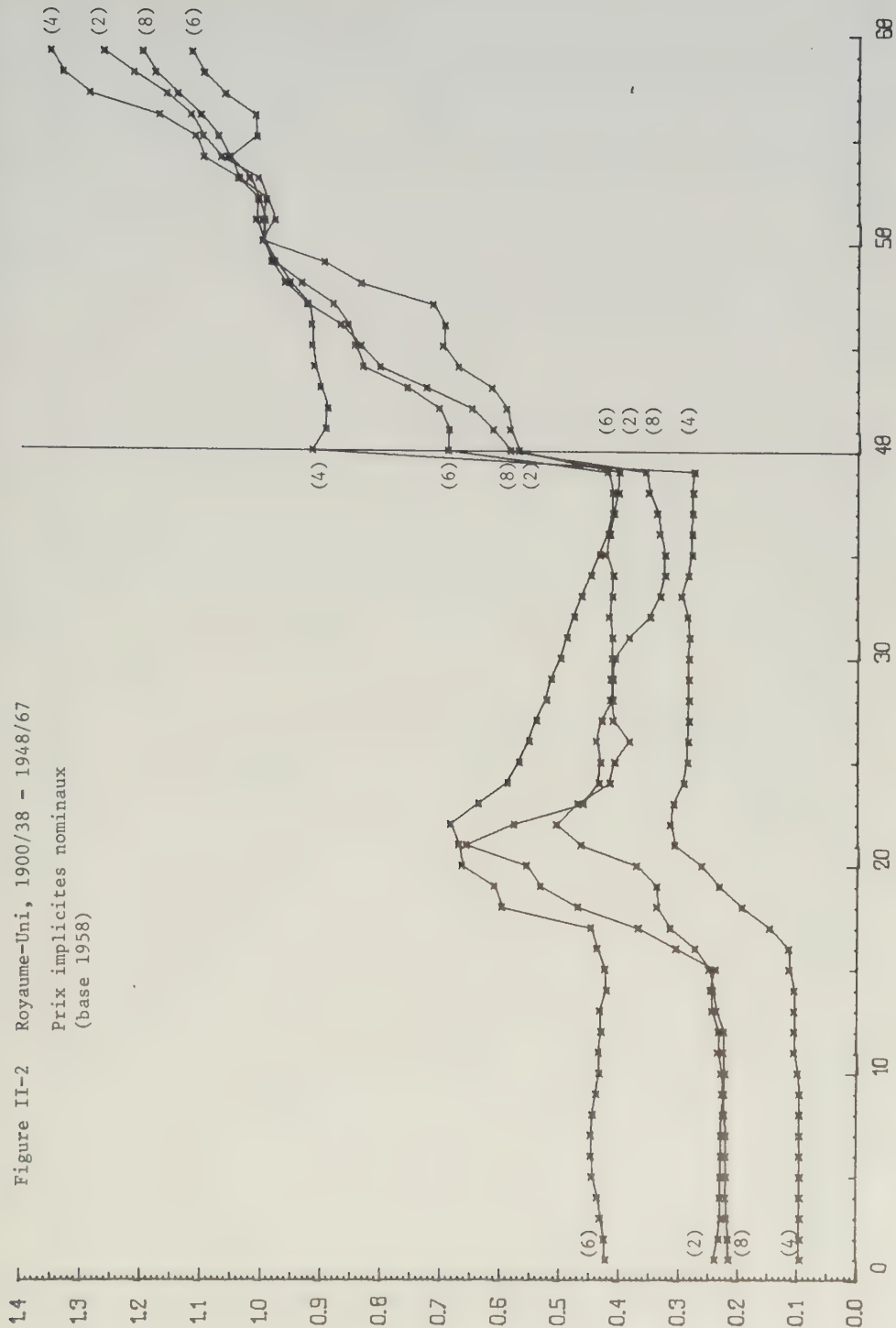


Figure II-2 Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67

Prix implicites nominaux
(base 1958)



Figures I à VIII

Les chiffres entre parenthèses désignent les numéros des rubriques.

Dans toutes les figures, le temps (périodes annuelles) est porté en abscisse.

Figure III
Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67
Consommation en valeur, par tête
(en livres)

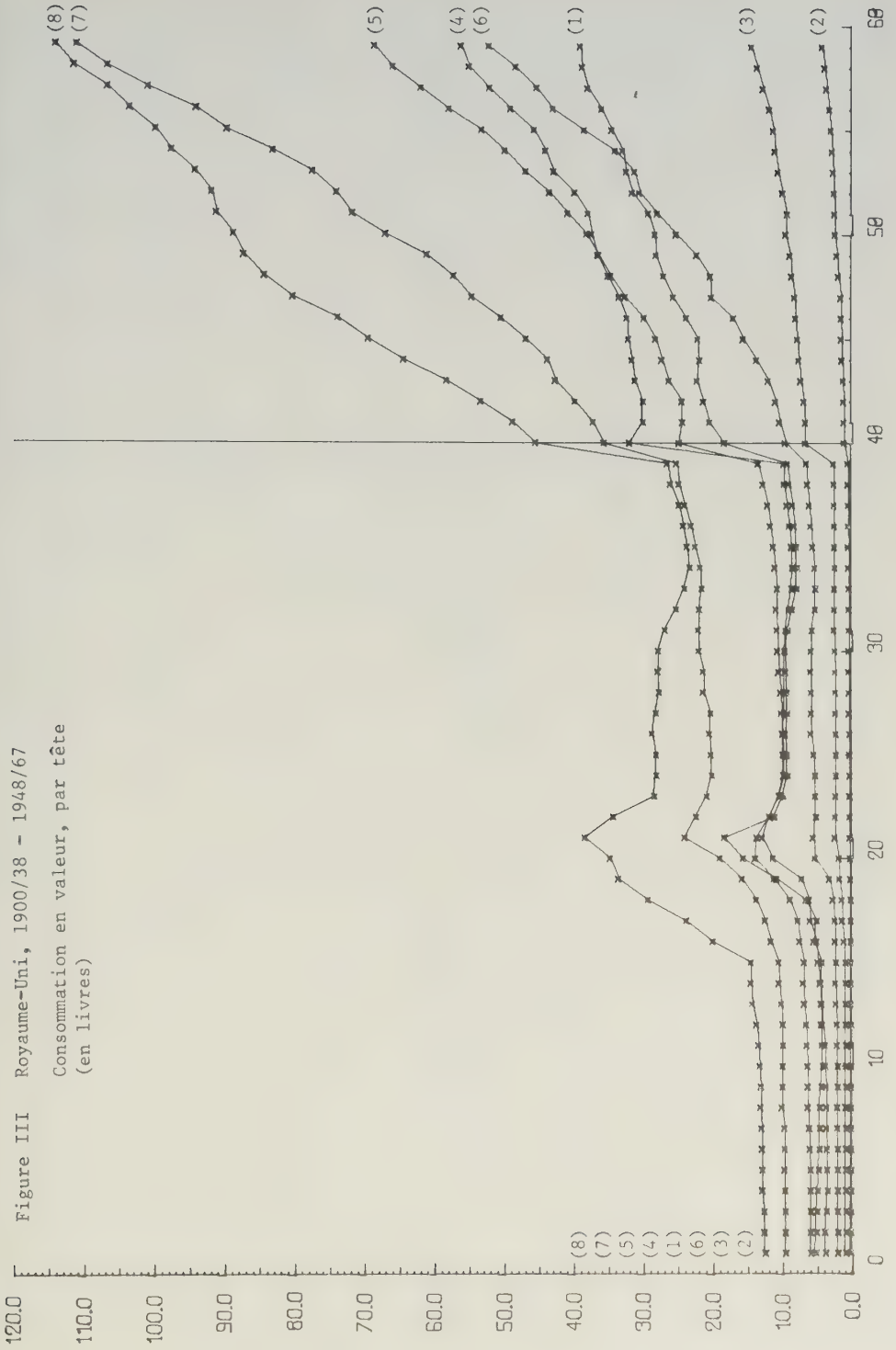


Figure IV-1 Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67
Coefficients budgétaires

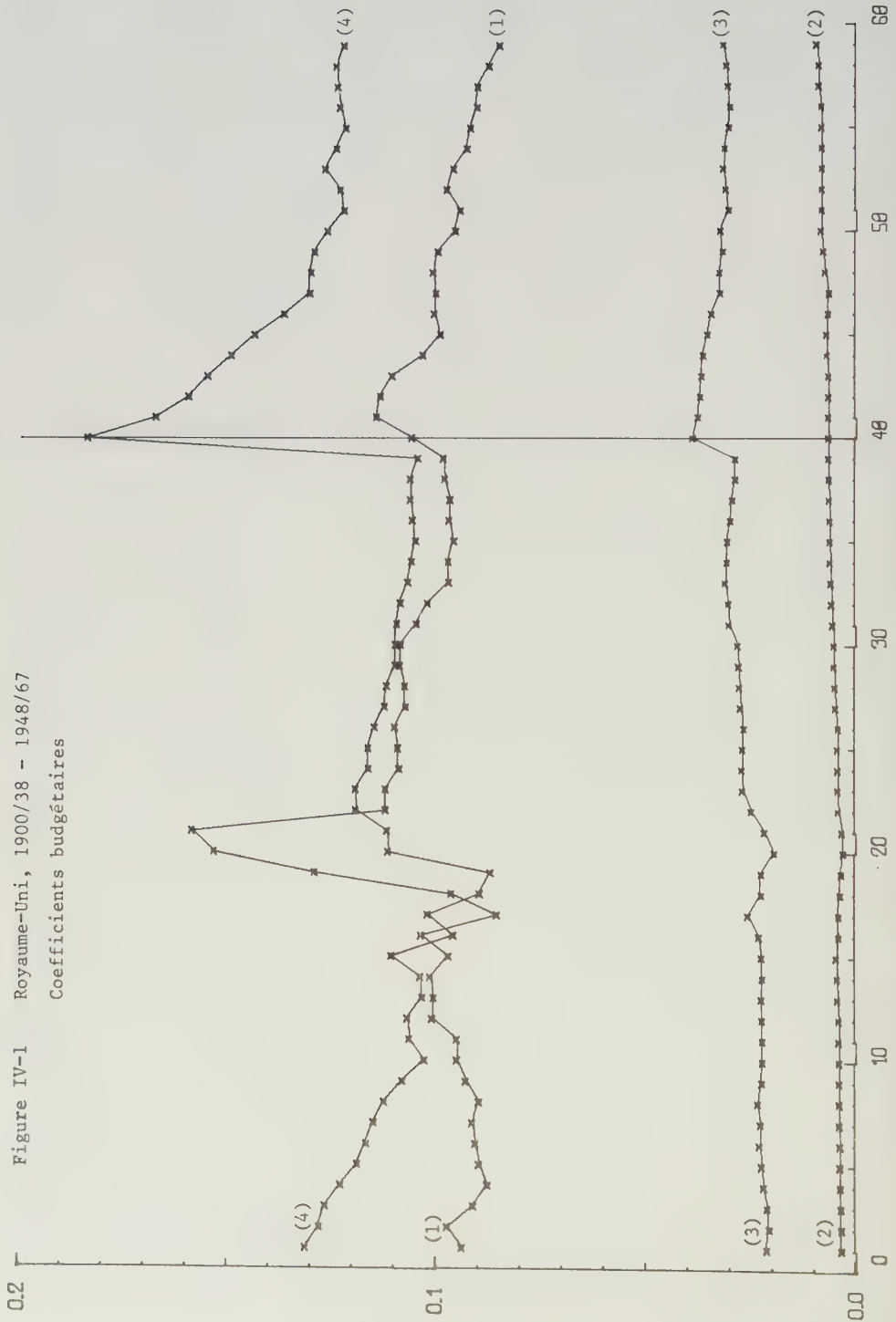
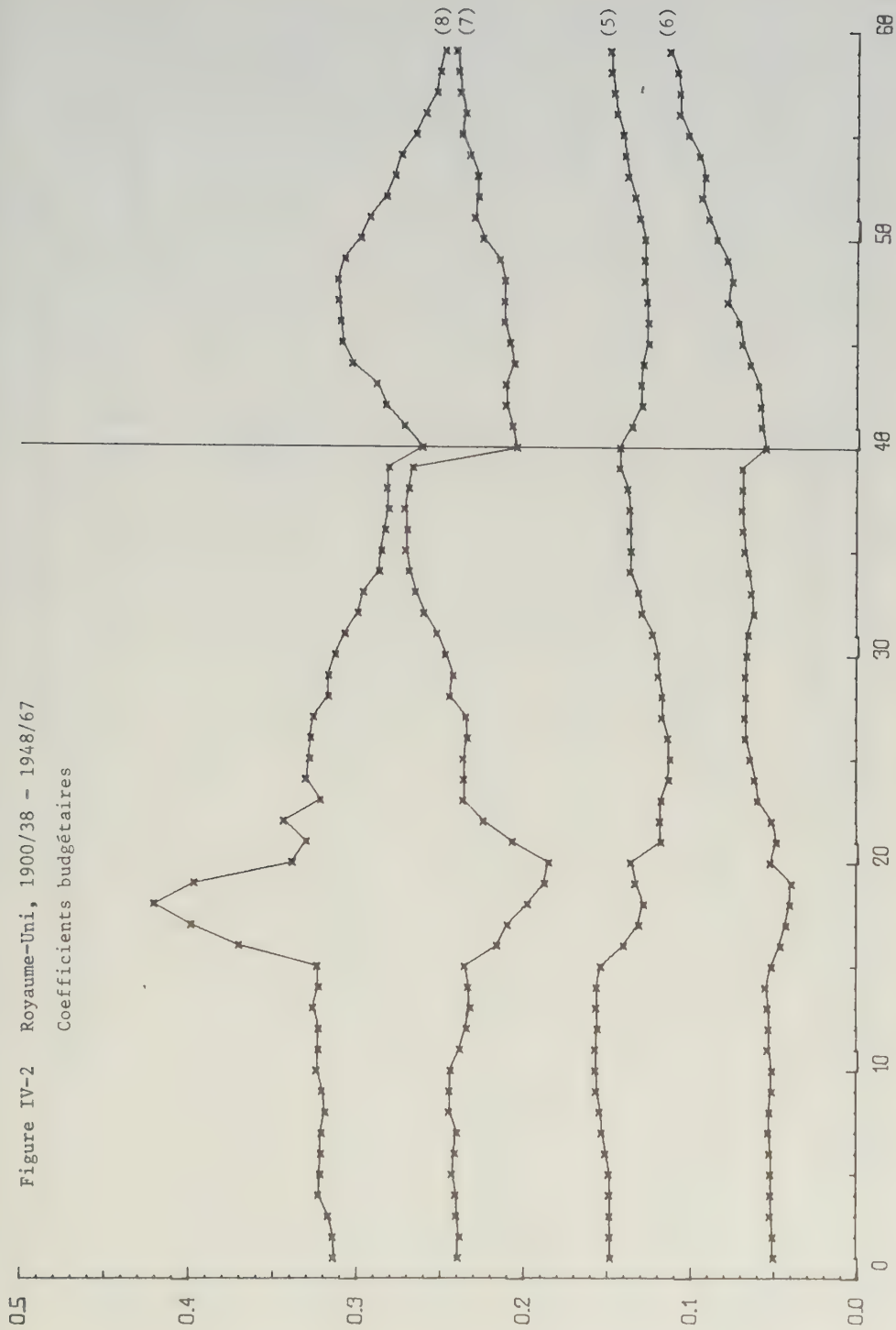
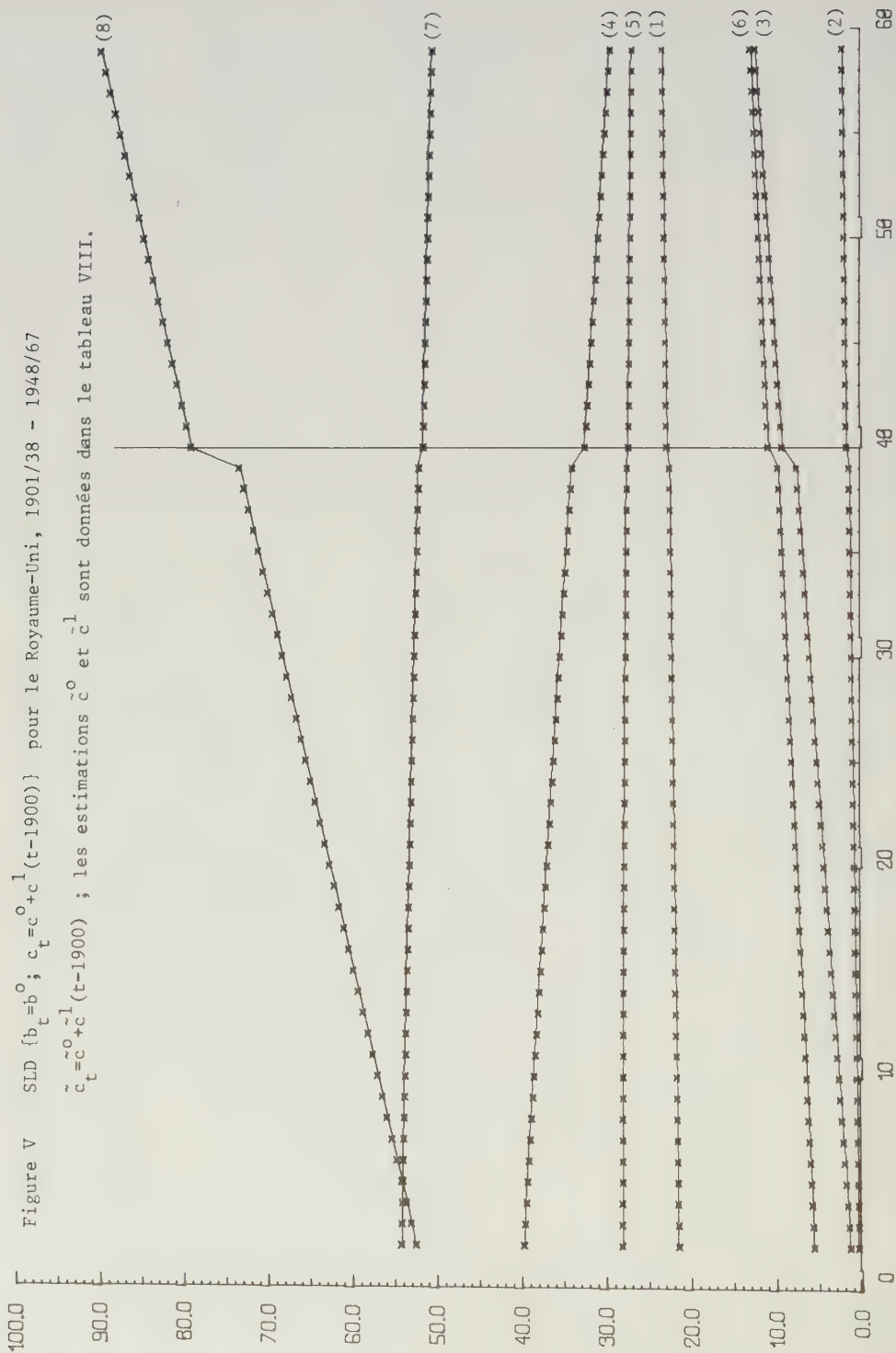


Figure IV-2 Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67
Coefficients budgétaires





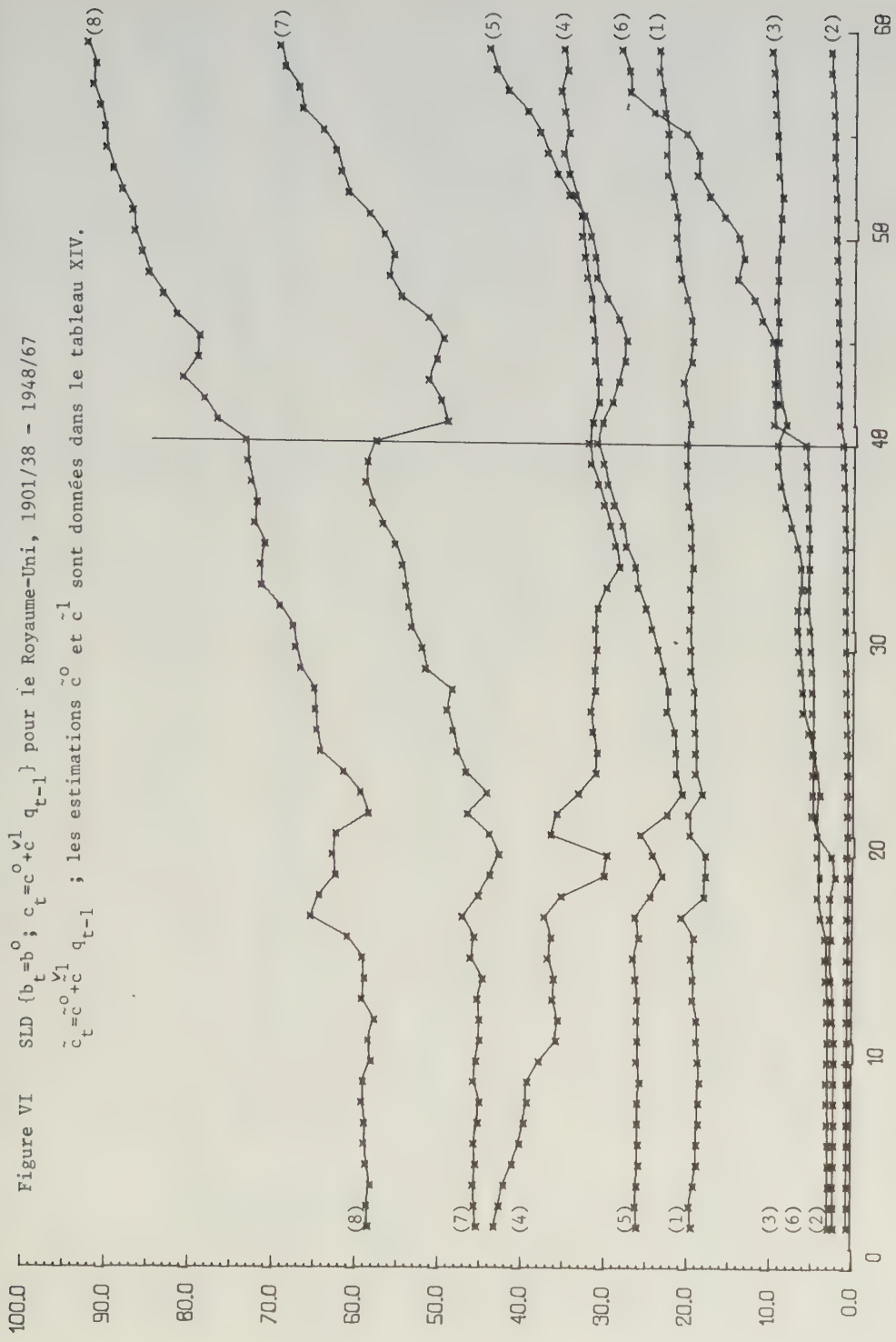


Figure VI SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67
 $\tilde{c}_t = \tilde{c}^0 + \tilde{c}^1 q_{t-1}$; les estimations $\tilde{c}^0$ et $\tilde{c}^1$ sont données dans le tableau XIV.

Figure VII SLD $\{b_t = b^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67
 $\tilde{b}_t = \tilde{b}^0 + \tilde{b}^1(t-1900)$; les estimations $\tilde{b}^0$ et $\tilde{b}^1$ sont données dans le tableau X.

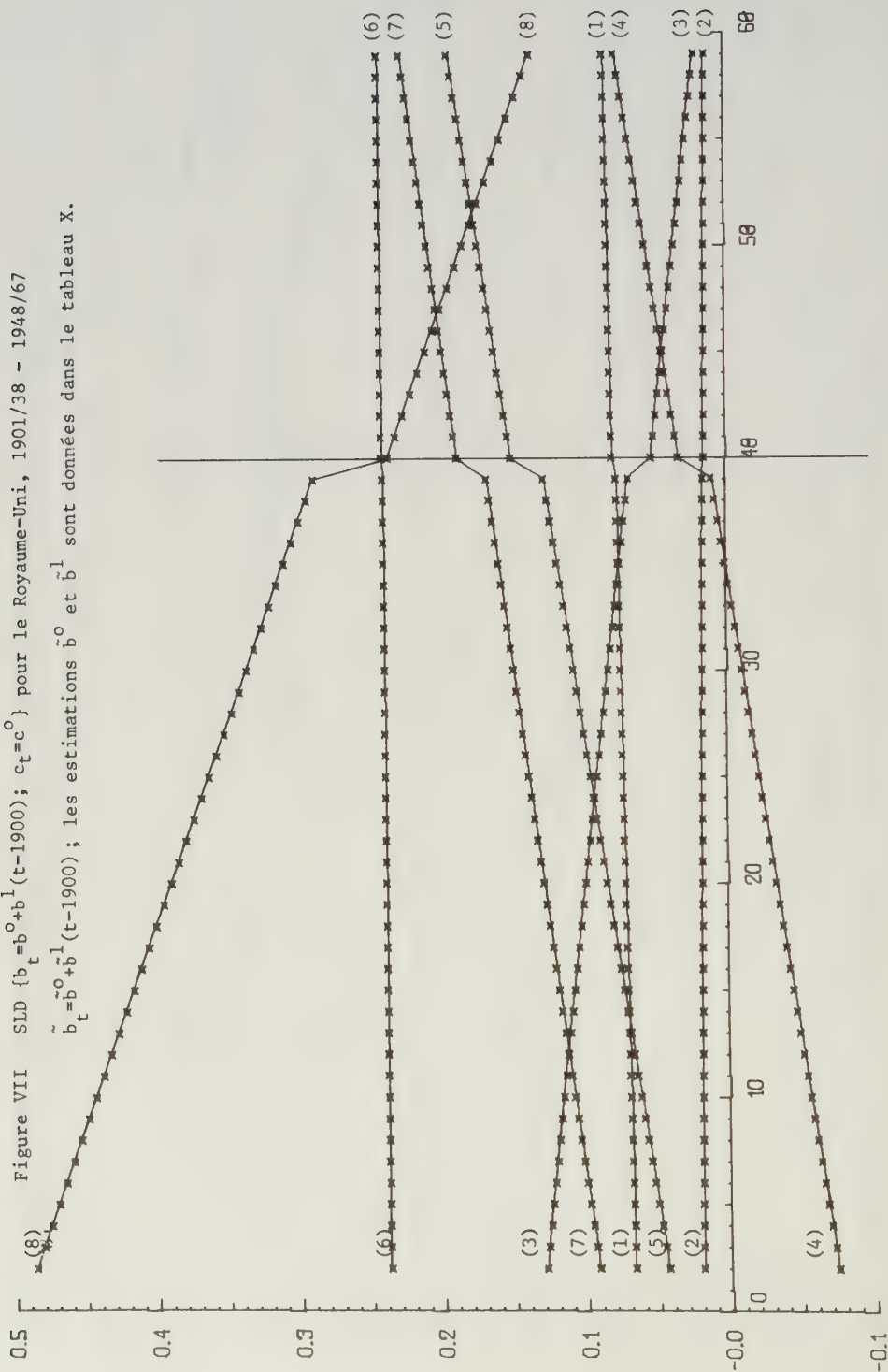


Figure VIII-1 SLD $\{b_t = b^0 + b^1(t-1900); c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67

$\tilde{b}_t = \tilde{b}^0 + \tilde{b}^1(t-1900)$; les estimations $\tilde{b}^0$ et $\tilde{b}^1$ sont données dans le tableau XVI.

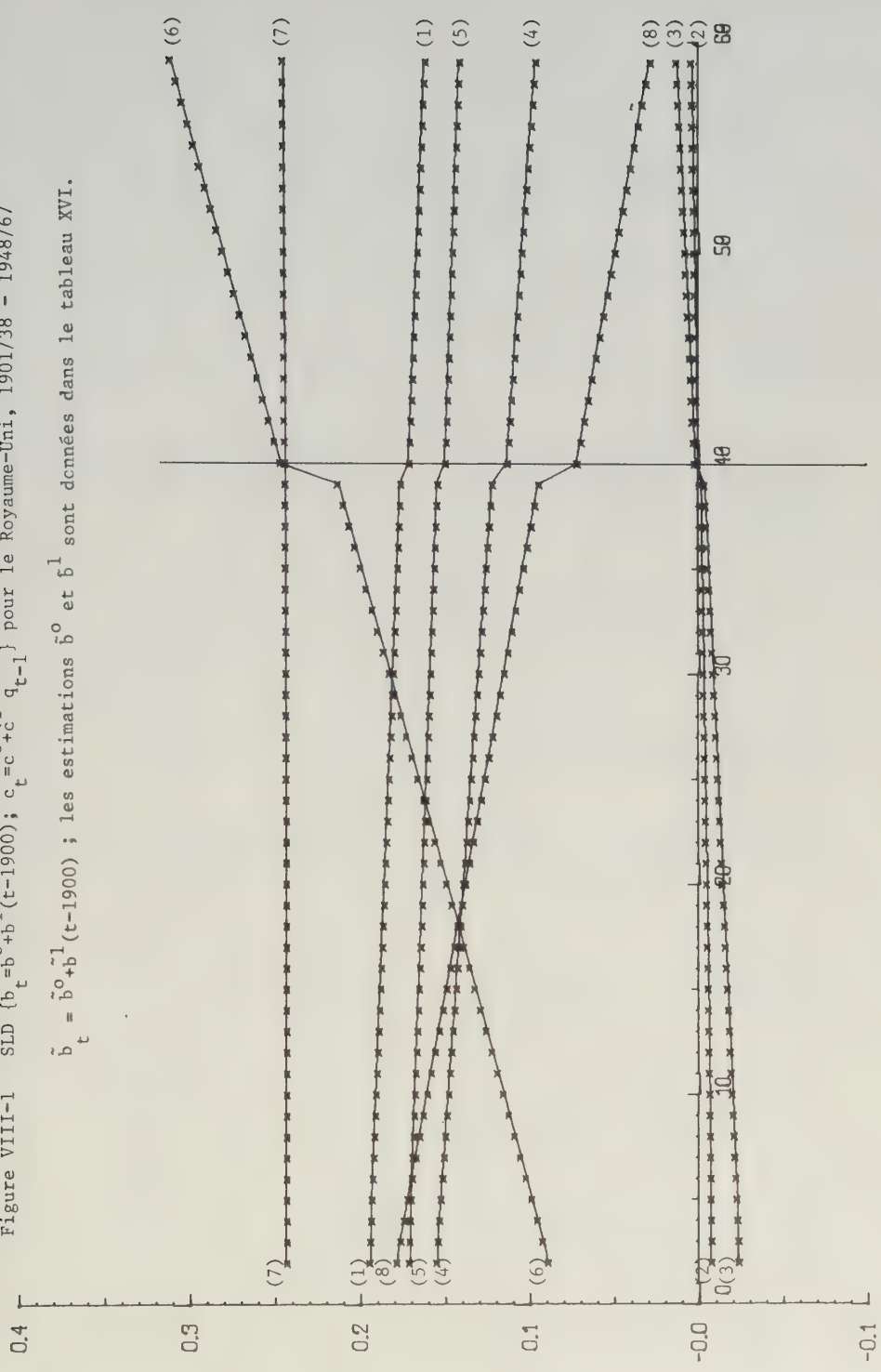
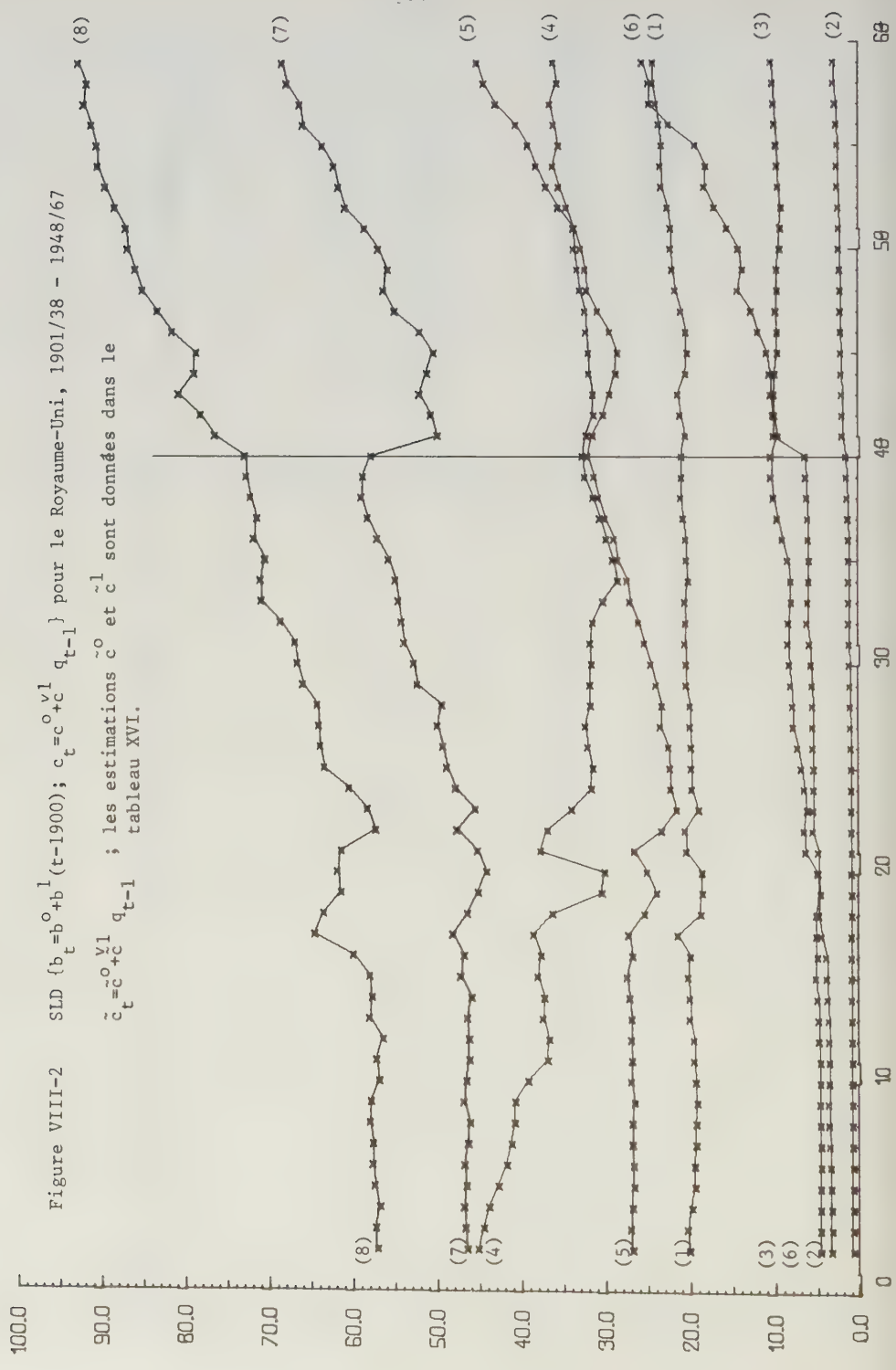


Figure VIII-2 SLD $\{b_t = b_0 + b^1(t-1900); c_t = c_0 + c^1 q_{t-1}\}$ pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67
 $\tilde{c}_t = \tilde{c}_0 + \tilde{c}^1 q_{t-1}$; les estimations $\tilde{c}^0$ et $\tilde{c}^1$ sont données dans le tableau XVI.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANTILLE, G., Consommation privée, prix implicites nominaux, ménages; état des données disponibles, *Cahiers du Centre d'économétrie*, Genève, Université, juillet 1970
- [2] BASMANN, R.L., A Theory of Demand with Variable Consumer Preferences, *Econometrica*, Vol. 24, No 1, janvier 1956, pp. 47-58
- [3] BROWN, T.M., Habit Persistence and Lags in Consumer Behaviour, *Econometrica*, Vol. 20. no 3, juillet 1952, pp. 355-371
- [4] BROWN, M., et HEIEN, D.M., The S-Branch Utility Tree. A Generalization of the Linear Expenditure System, State University of New York at Buffalo and Bureau of Labor Statistics, U.S. Department of Labor, 1967
- [5] CARLEVARO, F., Formulation et estimation des fonctions de consommation semi-agrégées, *Revue Canadienne d'Economiqne*, Vol. IV, No 4, septembre 1971, pp. 441-470
- [6] CARLEVARO, F., La procédure ADDEX pour l'estimation d'un système de fonctions de dépenses additives, *Cahiers du Centre d'économétrie*, Genève, Université, décembre 1971
- [7] CARLEVARO, F., et ROSSIER, E., Le programme LINEX pour l'estimation des paramètres du système linéaire de dépenses, *Cahiers du Centre d'économétrie*, Genève, Université, juin 1970
- [8] CARLEVARO, F., et ROSSIER, E., Fonctions de consommation semi-agrégées pour la Suisse, Assemblée annuelle de la Société suisse de statistique et d'économie politique, Neuchâtel, 16-17 avril 1971
- [9] CARLEVARO, F., et SNELLA, J.J., Estimation d'un système de fonctions de consommation additives en présence d'auto-corrélation, *Cahiers du Centre d'économétrie*, Genève, Université, (en préparation)
- [10] COURBIS, R., Le modèle physico-financier de projection économique à moyen terme FIFI, Commission économique pour l'Europe, Nations Unies, avril 1970

- [11] DAHLMAN, C.J., et KLEVMARKEN, A., *Den privata Konsumtionen 1931-1975*, Industriens utredningsinstitut, Stockholm, 1971
- [12] DHRYMES, P.J. *Econometrics, Statistical Foundations and Applications*, New York, Harper & Row, 1970
- [13] DUESENBERY, J.S., *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1949
- [14] DUVAL, A., FONTELA, E., McNEIL, G., *Explor 80, A Computable Model for Europe*, European Econometric Society Meeting, Bruxelles, 1-3 septembre 1969
- [15] FRIEDMAN, M., *A Theory of the Consumption Function*, National Bureau of Economic Research, New York, 1957
- [16] GANDOLFO, G., *Metodi Matematici e Modelli in Dinamica Economica*, Roma, Edizioni Ricerche, 1968
- [17] GEARY, R.C., *A Note on a Constant Utility Index of the Cost of Living*, *Review of Economic Studies*, Vol. 18, 1949-1950, pp. 65-66
- [18] GOLDBERGER, A.S., et GAMALETSOS, T., *Utility Functions and Demand Functions*, Amsterdam, Congrès Européen de la Société d'économétrie, 6 septembre 1968
- [19] GORMAN, W.M., *Tastes, Habits and Choices*, *International Economic Review*, Vol. 8, No 2, juin 1967, pp. 218-222
- [20] HAAVELMO, T., *Methods of Mesuring the Marginal Propensity to Consume*, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 42, mars 1947, pp. 105-122
- [21] HOUTHAKKER, H.S., *Additive Preferences*, *Econometrica*, Vol. 28, No 2, avril 1960, pp. 244-257
- [22] HOUTHAKKER, H.S., and TAYLOR, L.D., *Consumer Demand in the United States, Analyses and Projections with Applications to Other Countries*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1970
- [23] ICHIMURA, S., *A Critical Note on the Definition of Related Goods*, *Review of Economic Studies*, Vol. 18, 1950-51, pp. 179-183
- [24] JOHANSEN, L., *On the Relationship Between Some Systems of Demand Functions*, *Liiketaloudellinen Aikakauskirja* Vol. I, 1969, pp. 30-41

- [25] KALMAN, P.J. Theory of Consumer Behaviour when Prices Enter the Utility Function, *Econometrica*, Vol. 36, No 3-4, juillet-octobre 1968, pp. 497-510
- [26] KLEIN, R.L., et RUBIN, H., A Constant Utility of the Cost of Living, *Review of Economic Studies*, Vol. 15, 1947-48, pp. 84-87
- [27] LANCASTER, K., *Mathematical Economics*, New York, MacMillan, 1968
- [28] LENOIR, M., *Etudes sur la formation et le mouvement des prix*, Paris, M. Giard, 1913
- [29] MALINVAUD, E., *Méthodes statistiques de l'économétrie*, Paris, Dunod, 1969
- [30] MANARA, C.F., et NICOLA, P.C., *Elementi di Economia Matematica*, Milano, Editrice Viscontea, 1970
- [31] MASSY, W.F., Shifts in the Demand for a Maturing Product and their Implications for Consumers' Slutsky-Hicks Substitution Terms, *Metroeconomica*, Vol. XV, No 1, avril 1963, pp. 24-37
- [32] MATTEI, A., Un système complet de fonctions de demande dynamiques. Estimation et prévision pour la Suisse, *Revue suisse d'économie politique et de statistique*, Vol. 106, No 4, décembre 1970, pp. 453-490
- [33] NASSE, P., Analyse des effets de substitution dans un système complet de fonctions de demande, *Annales de l'INSEE*, No 5, septembre-décembre 1970, pp. 81-110
- [34] PARKS, R.W. Systems of Demand Equations : an Empirical Comparison of Alternative Functional Forms, *Econometrica*, Vol. 37, No 4, octobre 1969, pp. 629-650
- [35] PESTON, M., Changing Utility Functions, in M. Shubik ed., *Essays in Mathematical Economics, In Honor of O. Morgenstern*, Princeton University Press, 1967, pp. 233-236
- [36] PHILIPS, L., A Dynamic Version of the Linear Expenditure Model, Institut des sciences économiques, Université catholique de Louvain, Brussels, Econometric Society Meeting, 1-3 septembre 1969

- [37] PHILIPS, L., Dynamic Demand Systems and the Maximum Principle
Institut des sciences économiques, Université
catholique de Louvain, Working Paper No 7104, 19
- [38] POLLAK, R.A., and WALES, T.J., Estimation of the Linear Expenditure
System, *Econometrica*, Vol. 37, No 4, octobre
1969, pp. 611-628
- [39] PONTRYAGIN, L.S., BOL'TANSKII, V.G., GAMKRELIDZE, R.S., et MISCHENKO,
E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*,
London, Pergamon Press, 1964
- [40] ROY, R., *De l'utilité, contribution à la théorie des
choix*, Paris, Hermann, 1942
- [41] SAMUELSON, P.A. Some Implication of Linearity, *Review of
Economic Studies*, Vol. 15, 1947-48, pp. 88-90
- [42] SCHULTZ, H., *The Theory of Measurement of Demand*, Chicago,
The University of Chicago Press, 1937
- [43] SOLARI, L., *Modèles économiques et régulations, Les sciences
sociales : problèmes et orientations*, Paris,
1968, pp. 384-396
- [44] SOLARI, L., Extensions conceptuelles et statistiques du
système linéaire de dépenses, *Cahiers du Centre
d'économétrie*, Genève, Université, mai 1968
- [45] SOLARI, L., Sur l'estimation du système linéaire de dépenses
par la méthode du maximum de vraisemblance,
Cahiers du Centre d'économétrie, Genève, Univer-
sité, mars 1969
- [46] SOLARI, L., Sur l'estimation des fonctions de consommation
semi-agrégées, l'exemple du système linéaire de
dépenses, *Publications économétriques*, Vol. III,
No 1, 1970
- [47] SOLARI, L. *Théorie des choix et fonctions de consommation
semi-agrégées - Modèles statiques*, Genève-Paris,
Librairie Droz, 1971
- [48] SOLARI, L., Le système linéaire de dépenses généralisé :
spécification et estimation, *Cahiers du Séminaire
d'économétrie*, Paris, Centre national de la
recherche scientifique, 13, 1971
- [49] STONE, R., *Linear Expenditure Systems and Demand Analysis :
An Application to the Pattern of British Demand*,
The Economic Journal, Vol. 64, No 255, septembre
1954, pp. 511-527

- [50] STONE, R., *Mathematics in the Social Sciences and other Essays*, London, Chapman and Hall, 1966
- [51] STONE, R., *Mathematical Models of the Economy and other Essays*, London, Chapman and Hall, 1970
- [52] STONE, R., and CROFT-MURRAY, G. *Social Accounting and Economic Models*, London, Bowes and Bowes, 1959
- [53] STONE, R. and BROWN, J.A.C., A Long-Term Growth Model for the British Economy, *Europe's Future in Figures*, Asepelt, Vol. I, Amsterdam, North-Holland, 1962
- [54] STONE, R., and ROWE, D.A., The Market Demand for Durable Goods, *Econometrica*, Vol. 25, No 3, juillet 1957, pp. 423-443
- [55] TAYLOR, L.D., et WEISERBS, D., De l'estimation de l'utilité marginale du revenu dans les modèles de demande dynamiques, Institut des sciences économiques, Université catholique de Louvain, Working Paper No 7106, août 1971
- [56] TINTNER, G., Complementary and Shifts in Demand, *Metroeconomica*, Vol. 4, 1952, pp. 1-4
- [57] VANGREVELINGHE, G., Le point des recherches récentes dans le domaine de l'analyse de la demande de biens durables, Amsterdam, European Meeting on Statistics, Econometrics and Management Science, 2-7 septembre 1968
- [58] YOSHIHARA, K., Demand Functions : An Application to the Japanese Expenditure Pattern, *Econometrica*, Vol. 37, No 2, avril 1969, pp. 257-274

TABLE DES MATIERES

Avant-Propos	I
Chapitre I <u>Conceptualisation de base et état des connaissances acquises</u>	1
1. Systèmes de fonctions de consommation semi-agrégées	1
2. Modèles statiques, cinématiques, dynamiques	6
3. Aperçu de quelques travaux précurseurs	8
4. Présentation du plan de thèse	11
Chapitre II <u>Cadre théorique des formulations cinématiques et dynamiques de fonctions de consommation semi-agrégées</u>	15
1. Formulations cinématiques et dynamiques dans le cadre de la théorie des choix	15
1.1 Modifications de structure au niveau des fonctions de consommation	16
1.2 Modifications de structure au niveau des préférences de la cellule de consommation	18
2. Influences du passé et formations d'habitudes de consommation	25
2.1 La voie proposée par Houthakker et Taylor	25
2.2 Influences du passé et habitudes de consommation	29
3. Incidence des plans de consommation future	37
3.1 L'approche de Phlips	37
3.2 Formulations de modèles tenant compte de niveaux de consommation désirée	40
4. Situations de longue période et propriétés dynamiques	45
4.1 Effets de longue période	45
4.2 Propriétés dynamiques de quelques types de modèles de consommation	47

Chapitre III	<u>Applications au système linéaire de dépenses</u>	54
1.	Le système linéaire de dépenses statique	54
2.	Extensions cinématiques et formulations dans l'optique des habitudes de consommation	58
3.	Application au système linéaire de dépenses d'une version discrète de l'approche dynamique de Houthakker et Taylor	64
4.	Introduction d'un système de prix normaux	69
5.	Formulations tenant compte de plans de consommation future	79
Annexe	: Remarques sur les valeurs propres de la matrice $(I - b \cdot c')$	84
Chapitre IV	<u>Autres applications</u>	87
1.	Le système linéaire de dépense généralisé	87
1.1	Le système linéaire de dépense généralisé statique	87
1.2	Formulations dans l'optique des habitudes de consommation	91
2.	Le système indirect addilog	93
2.1	Le système indirect addilog statique	94
2.2	Formulations dans l'optique des habitudes de consommation	97
3.	Mise en évidence des liens existant entre les différents modèles	105
Chapitre V	<u>Problématique de l'estimation des modèles envisagés</u>	110
1.	Spécifications économétriques	110
1.1	Le cas des modèles statiques	110
1.2	Spécifications économétriques de modèles ciné- cinématiques et dynamiques	113
2.	Méthodes d'estimation	116
2.1	Estimateurs envisagés	117
2.2	Procédures numériques	121
2.3	Cas particuliers de certains modèles dynamiques	124

Chapitre VI	<u>Expériences avec les données du Royaume-Uni, 1900/38 - 1948/67</u>	136
1. Les données utilisées		136
2. Les systèmes de fonctions de consommation retenus		137
3. Présentation des résultats et adéquation des différents modèles		139
4. Autocorrélation des erreurs résiduelles		144
5. Analyse par simulation des propriétés des estimateurs envisagés dans leur application au modèle autorégressif SLD $\{b_t = b^0; c_t = c^0 + c^1 q_{t-1}\}$		148
Chapitre VII	<u>Analyse comparative et conclusions</u>	155
1. Contenu économique et estimations des différents systèmes de fonctions de consommation pour le Royaume-Uni, 1901/38 - 1948/67		155
2. Remarques terminales		164
Annexes		
Tableaux I à LV		169
Figures I à VIII		224
Bibliographie		235
Table des matières		240

Edouard Rossier, né le 21.9.1945 à Sion. A obtenu sa maturité scientifique au Collège de Sion en 1965. La licence ès sciences économiques, mention mathématique lui a été décernée en 1968. A été assistant au Centre d'économétrie de l'Université de Genève de 1968 à 1972. Le 23 février 1973, il a soutenu sa thèse pour l'obtention du doctorat ès sciences économiques et sociales, mention économétrie et statistique. A été nommé en qualité de chef de travaux à partir du 1.10.72.

Publications:

Le programme LINEX, pour l'estimation des paramètres du système linéaire de dépenses, *Cahier du Centre d'économétrie*, Genève, Université juin 1970 (en collaboration avec F. Carlevaro).

Fonctions de consommation semi-agrégées pour la Suisse, *Documents du Centre d'économétrie*, Genève, Université, avril 1971 et *Revue suisse d'économie politique et de statistique*, 107, 3, 1971, pp. 641-662 (en collaboration avec F. Carlevaro).

